Universität Dortmund
Lehrstuhl für Mechanik
Prof. em. Dr. S. Kessel

Starthilfe Mechanik

Mathematische Grundlagen

© Dortmund 2001

Inhalt

Vorwort

0. Griechische Buchstaben
1. Zahlen (1 - 4)
2. Geometrische Grundlagen (1 - 11)
3. Elementare Funktionen (1 - 29)
4. Geradengleichungen (1 - 6)
5. Differentialrechnung (1 - 22)
6. Integralrechnung (1 - 9)
7. Vektoren im dreidimensionalen Raum (1 - 17)
8. Musterlösungen der Aufgaben (1 - 34)

Vorwort

In den vergangenen Jahren hat die Überprüfung der mathematischen Fähigkeiten der Studienanfänger in den ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen gezeigt, daß bei den meisten Studierenden erhebliche Lücken vorhanden sind. Die Gründe dafür sind sicherlich vielfältig: Zu früher Ausstieg aus den Mathematikkursen, zu geringe Mitarbeit, vielleicht aber auch eine unzweckmäßige Auswahl der Unterrichtsthemen.

Im Grundstudium der Ingenieurwissenschaften werden die naturwissenschaftlichen Grundlagen der Physik und ihrer Teilgebiete Mechanik, Thermodynamik und Elektrotechnik vermittelt, wobei vorwiegend mathematische Methoden eingesetzt werden, die eigentlich zur Schulausbildung in der Sekundarstufe II gehören sollten, wie beispielsweise Elementare Funktionen, Differentialrechnung, Integralrechnung und die Vektorrechnung. In den Mathematik-Vorlesungen des Grundstudiums werden diese Gebiete erneut behandelt und in einen strengen Rahmen eingebettet, aber in der Regel kommen diese Wiederholungen für die Anwendungen in den naturwissenschaftlichen Fächern zu spät.

Studenten mit breiten Lücken im mathematischen Basiswissen und Können haben gerade in den ersten Semestern große Schwierigkeiten zu überwinden, was meist zu einer unerwünschten Verlängerung der Studienzeit führt. Mit dieser Starthilfe soll versucht werden, so früh wie möglich für eine Verbesserung der Ausbildung zu sorgen.

In sieben Kapiteln werden Begriffe und Methoden beschrieben, die bei einem ingenieurwissenschaftlichen Studium als mathematische Grundkenntnisse in der Regel vorausgesetzt werden. Im Stil einer kommentierten und mit Beispielen durchsetzten Formelsammlung werden die Gebiete möglichst elementar und anschaulich behandelt, wobei auf strenge Beweise weitgehend verzichtet wird. Zu jedem Thema sind außerdem Aufgaben mit ausführlich beschriebenen Musterlösungen angegeben.

Die angebotene Starthilfe ist nicht als Ersatz für die Vorlesungen „Mathematik für Ingenieure“ im 1. und 2. Semester sowie für entsprechende Lehrbücher und Formelsammlungen gedacht. Beabsichtigt ist lediglich eine anwendungs-

nahe Erklärung des mathematischen „Handwerkszeugs“, das insbesondere in der Mechanik, der Thermodynamik, der Elektrotechnik und der Physik schon in den ersten Semestern eingesetzt werden muß.

Zur mathematisch seriösen Schreibweise gehört, daß man für unterschiedliche Objekte und Begriffe verschiedene Buchstaben verwendet. Weil dabei oft das deutsche Alphabet schnell erschöpft ist, kann die Erweiterung um das griechische sehr hilfreich sein. Um den Umgang damit in Wort und Schrift zu erleichtern, wurden die am häufigsten benutzten griechischen Buchstaben in einer Tabelle zusammengestellt.

α	Alpha
β	Beta
γ,Γ	Gamma
δ,Δ	Delta
κ	Kappa
λ,Λ	Lambda
μ	My
ν	Ny
ε	Epsilon
σ,Σ	Sigma
τ	Tau
φ,Φ	Phi
ϑ,Θ	Theta
ρ	Rho
π,Π	Pi
ψ,Ψ	Psi
χ	Chi
ξ	Xi
η	Eta
ζ	Zeta
ω,Ω	Omega

Reelle Zahlen (R**)**:

Natürliche Zahlen (N):

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad ...$$

Ganze Zahlen (Z):

$$... \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad ...$$

Rationale Zahlen (Q):

Beispiele: $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{2}{3} = 0,666... =: 0,\overline{6}$ $\frac{1}{11} = 0,090909... =: 0,\overline{09}$

endlicher oder periodisch - unendlicher Dezimalbruch

nichtrationale (irrationale) Zahlen:

Beispiele: $\sqrt{2} = 1,414213562...$ $\sqrt[3]{10} = 2,15443469...$

nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch

Algebraische Zahlen: nichtrationale Lösungen der Gleichungen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (n \text{ ganzzahlig})$$

Transzendente Zahlen (nichtalgebraische Zahlen):

Beispiele: $\pi = 3,141592654...$ $e = 2,71828182846...$

Bruchrechnung:

Der Wert eines Bruches B ändert sich nicht, wenn der Zähler Z und der Nenner N mit der gleichen Zahl $a \neq 0$ multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert werden:

$$B := \frac{Z}{N} = \frac{aZ}{aN} = \frac{Z/a}{N/a}, \qquad a \neq 0.$$

Multiplikation und Division eines Bruches mit einer Zahl a:

$$aB = \frac{aZ}{N}, \qquad \frac{1}{a}B = \frac{Z}{aN}.$$

Für die Addition und Subtraktion von Brüchen ist die Einführung eines gemeinsamen Nenners N_g erforderlich:

$$B_1 := \frac{Z_1}{N_1}, \quad B_2 := \frac{Z_2}{N_2}, \qquad \rightarrow \qquad N_g = a_1 N_1 = a_2 N_2,$$

$$B_1 := \frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_1 Z_1}{N_g}, \qquad B_2 := \frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_2 Z_2}{N_g},$$

$$B_1 + B_2 = \frac{a_1 Z_1 + a_2 Z_2}{N_g}, \qquad B_1 - B_2 = \frac{a_1 Z_1 - a_2 Z_2}{N_g}.$$

Multiplikation und Division von Brüchen:

$$B_1 \cdot B_2 = \frac{Z_1 Z_2}{N_1 N_2}, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{Z_1 N_2}{N_1 Z_2}.$$

Komplexe Zahlen (ℂ):

Definition:

$$\boldsymbol{z} = a + ib \qquad (a,b\text{: reelle Zahlen})$$

$$i := \text{imaginäre Einheit} \qquad i^2 := -1, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Insbesondere in der Elektrotechnik verwendet man für die imaginäre Einheit den Buchstaben j.

$$a\text{: Realteil von } \boldsymbol{z}, \qquad b\text{: Imaginärteil von } \boldsymbol{z},$$

$$\overline{\boldsymbol{z}} := a - ib \qquad \text{zu } \boldsymbol{z} = a + ib \text{ konjugiert komplexe Zahl}$$

Rechenregeln:

$$\boldsymbol{z}_1 = a_1 + ib_1, \qquad \boldsymbol{z}_2 = a_2 + ib_2,$$

$$\lambda \boldsymbol{z}_1 = \lambda a_1 + i\lambda b_1, \qquad (\lambda \text{ reelle Zahl})$$

$$\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$
$$\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2 := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$\boldsymbol{z}_1 \boldsymbol{z}_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

$$\boldsymbol{z}_1 \overline{\boldsymbol{z}}_1 := a_1^{\,2} + b_1^{\,2}.$$

$$|\boldsymbol{z}| := \sqrt{\boldsymbol{z}\,\overline{\boldsymbol{z}}} \qquad \text{Betrag der komplexen Zahl } \boldsymbol{z},$$

$$|a + ib| = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{z}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z}\,\overline{\boldsymbol{z}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{|\boldsymbol{z}|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{{a_2}^2+{b_2}^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{{a_2}^2+{b_2}^2}.$$

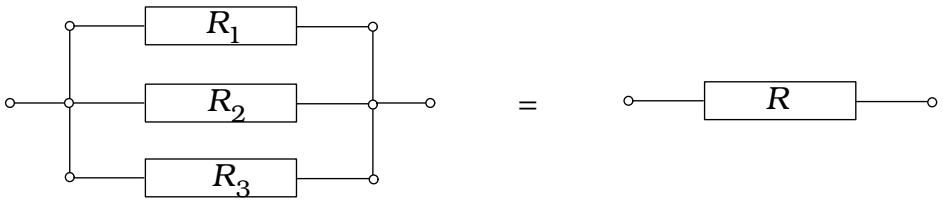
Aufgabe 1.1

Man berechne mit $B_1=2/3, B_2=4/7$ die Zahlen $(B_1+B_2),(B_1-B_2),B_1B_2$ und B_1/B_2.

Aufgabe 1.2

Man berechne mit $B_1=1/2,\quad B_2=1/3,\quad B_3=1/4$ die Zahlen $(B_1+B_2+B_3)$ und $(B_1B_2B_3)$.

Aufgabe 1.3



Drei parallel geschaltete elektrische Widerstände R_1,R_2 und R_3 können durch einen Widerstand R ersetzt werden, wenn

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{R_i}$$

ist. Man berechne R.

Aufgabe 1.4

Man vereinfache den Bruch

$$B=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+a}}}.$$

Aufgabe 1.5

Mit einem beweglichen Hilfsmaßstab (Nonius) kann man die Dezimalstellen bei einer Längenmessung genau ablesen, wenn man den Hilfsmaßstab mit 9/10 der Längeneinheit L_0 skaliert. Der Meßwert ergibt sich aus der Position der übereinanderliegenden Skalenstriche auf der festen und der beweglichen Skala. Man erkläre das Meßverfahren.

Aufgabe 1.6

Eine linear-elastische Feder der Steifigkeit c hat im unbelasteten Zustand die Länge L. Wird sie durch Zugkräfte F belastet, so verlängert sich die Feder um

$$\Delta L = \frac{F}{c}.$$

Gegeben sind drei Federn (Steifigkeiten c_i, Längen L_i). Hintereinander geschaltet wirken sie wie eine Feder der Länge L mit der Federkonstanten c_h Man berechne diese Ersatz-Federkonstante.

Aufgabe 1.7

Mit den komplexen Zahlen $\boldsymbol{z}_1 = 3 + i4, \quad \boldsymbol{z}_2 = 2 - i6$ berechne man $|\boldsymbol{z}_1|, |\boldsymbol{z}_2|, \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2,$ $\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2, 1/\boldsymbol{z}_1$ und $\boldsymbol{z}_1/\boldsymbol{z}_2$.

Aufgabe 1.8

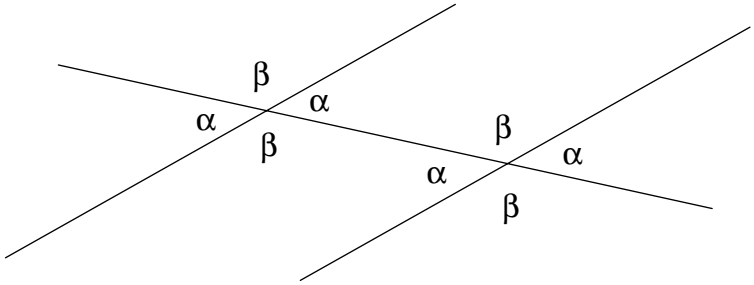
Mit den komplexen Zahlen

$$\boldsymbol{z}_1 = 1, \quad \boldsymbol{z}_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \qquad \boldsymbol{z}_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \overline{\boldsymbol{z}}_2$$

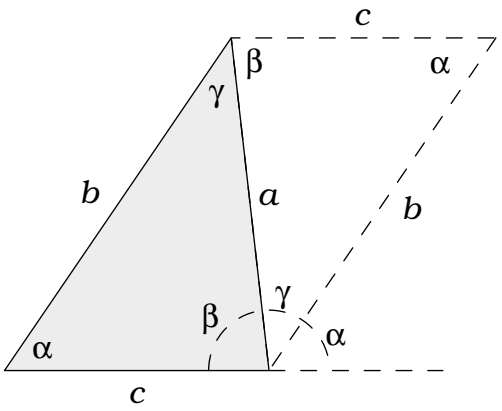
berechne man $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_1)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_2)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_3)$.

Um beispielsweise in der Mechanik die mathematische Simulation des Verhaltens technischer Systeme vorzubereiten, sind elementare Grundkenntnisse aus der **Euklidischen Geometrie** zur Formulierung der entsprechenden Gleichungen erforderlich. Die wichtigsten sind im folgenden zusammengestellt und werden bei Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt; sie gehören zur mathematischen Allgemeinbildung.

Die gegenüberliegenden Schnittwinkel einer Geraden mit zwei Parallelen sind gleich.

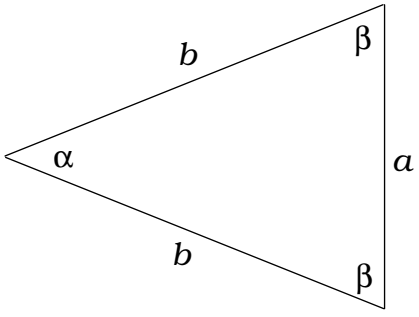


Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180^o.



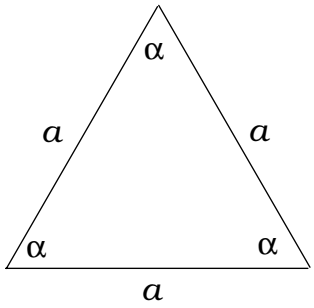
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o.$$

Spezielle Dreiecksformen:



$$\beta = 90^o - \frac{\alpha}{2}$$

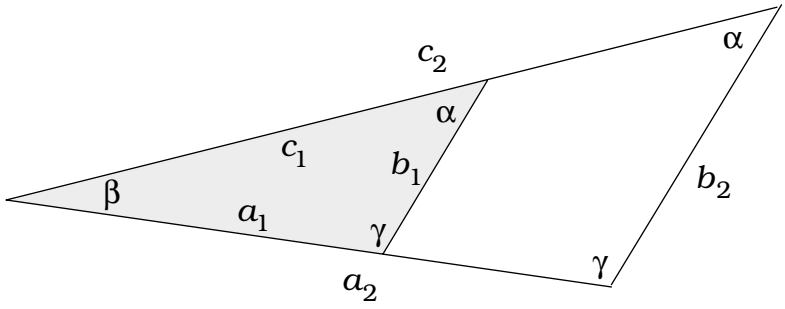
gleichschenkliges Dreieck



$\alpha = 60^o$

gleichseitiges Dreieck

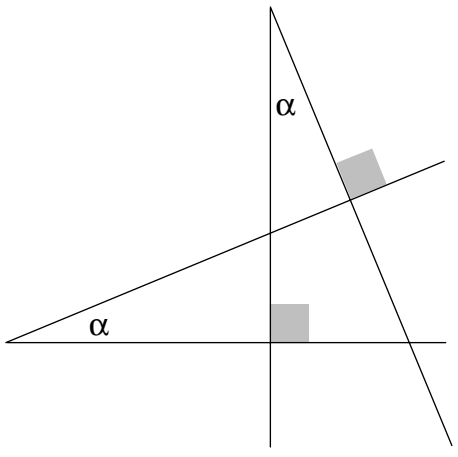
Dreiecke, bei denen die entsprechenden Winkel gleich sind, heißen ähnlich.



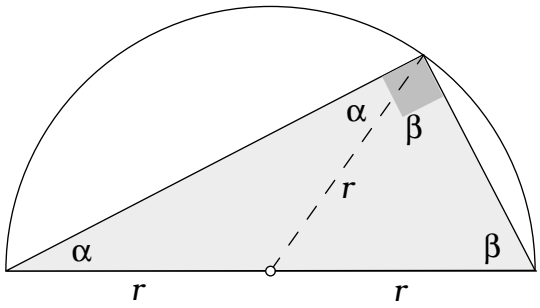
Es gelten dann die folgenden Seitenverhältnisse:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \qquad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich:



Alle Dreiecke, deren Eckpunkte auf einem Kreis liegen und den Durchmesser des Kreises als Dreiecksseite haben, sind rechtwinklig.



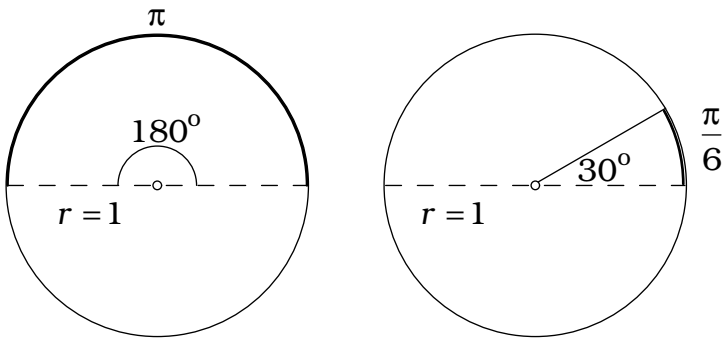
$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^o \qquad \rightarrow \qquad \alpha + \beta = 90^o$$

Grundlage für die Winkelmessung ist das Verhältnis der Länge des entsprechenden Kreisbogenabschnittes zum Radius des Kreises:

$$\alpha = \frac{\text{Umfangsabschnitt}}{\text{Radius}}.$$

Da $\alpha = 1$ als Bezugsgröße für die praktische Winkelmessung zu groß ist, verwendet man oft als Maßeinheit den Winkel

$$\alpha = \frac{\pi}{180} =: 1^o$$

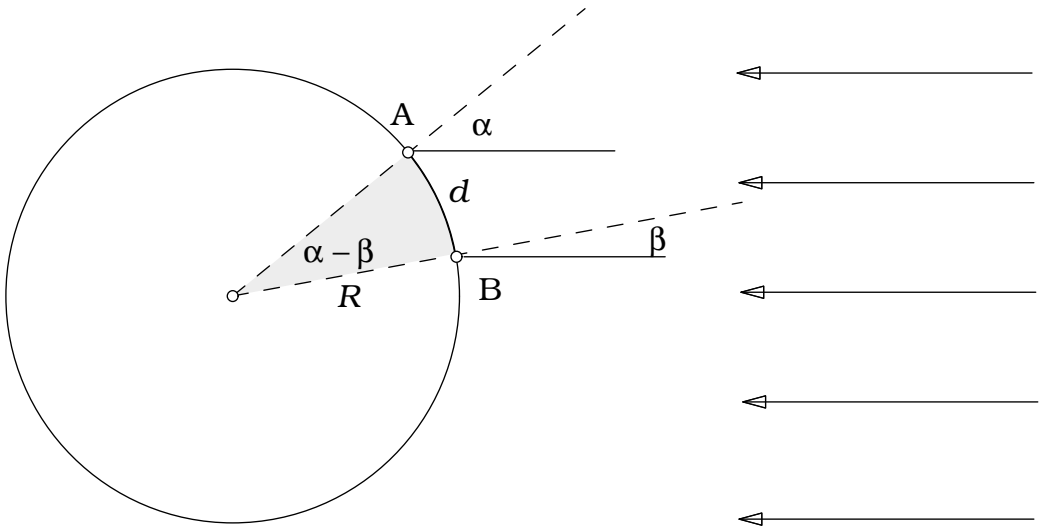


Es ist dann beispielsweise

$$\alpha = 30^o = 30 \cdot 1^o = 30 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}.$$

▼ Beispiel:

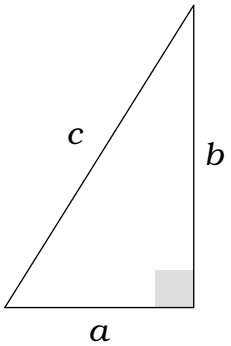
Werden an zwei Orten A und B mit dem Abstand d auf einem Meridian bei höchstem Sonnenstand die Einfallswinkel α und β der Sonnenstrahlen gemessen, so kann man den Radius R der Erdkugel berechnen:



$$d = R(\alpha - \beta) \qquad \rightarrow \qquad R = \frac{d}{\alpha - \beta}.$$

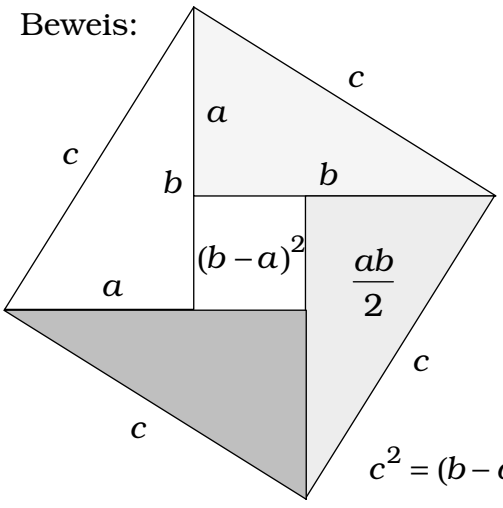
▲

Satz von Pythagoras:
In einem *rechtwinkligen* Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse (der längsten Dreiecksseite c) gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten (a und b).



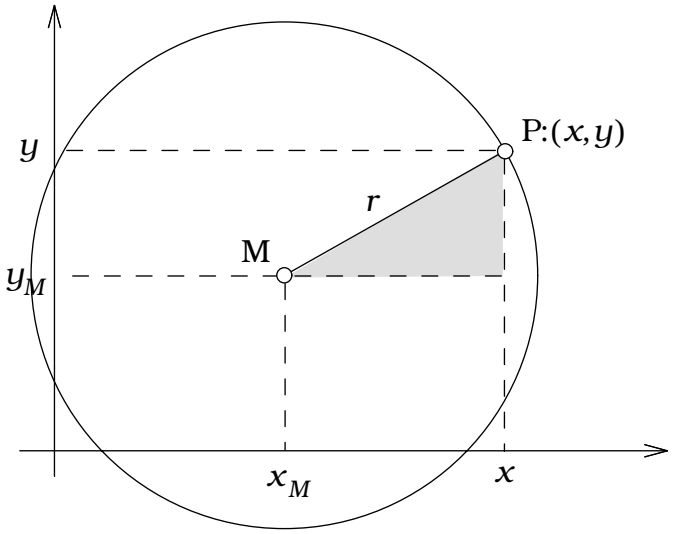
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beweis:



$$c^2 = (b-a)^2 + 4\,\frac{ab}{2} = a^2 + b^2$$

Ein **Kreis** ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben. Daraus ergibt sich die **Gleichung eines Kreises** in der xy-Ebene um den Mittelpunkt $M:(x_M, y_M)$ mit dem Radius r:

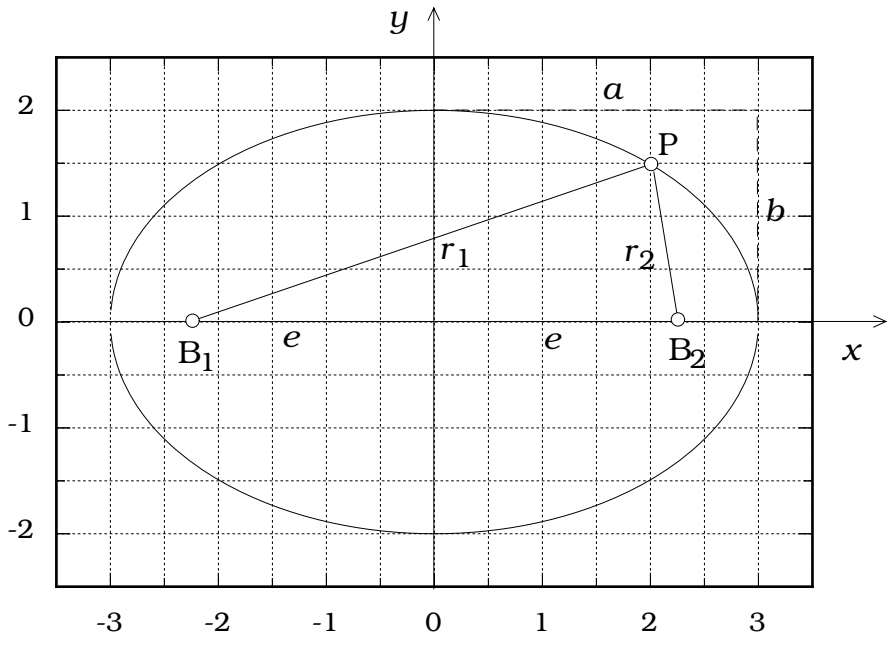


$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Gleichung des Kreises um den Koordinatenursprung $(x_M = 0, y_M = 0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Eine **Ellipse**



$(a = 3, \quad b = 2)$

ist der geometrische Ort aller Punkte P, bei denen die *Summe* der Abstände von zwei Punkten B_1 und B_2 konstant ist; B_1 und B_2 sind die Brennpunkte

der Ellipse, a und b die beiden Halbachsen.

$$r_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2},$$

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

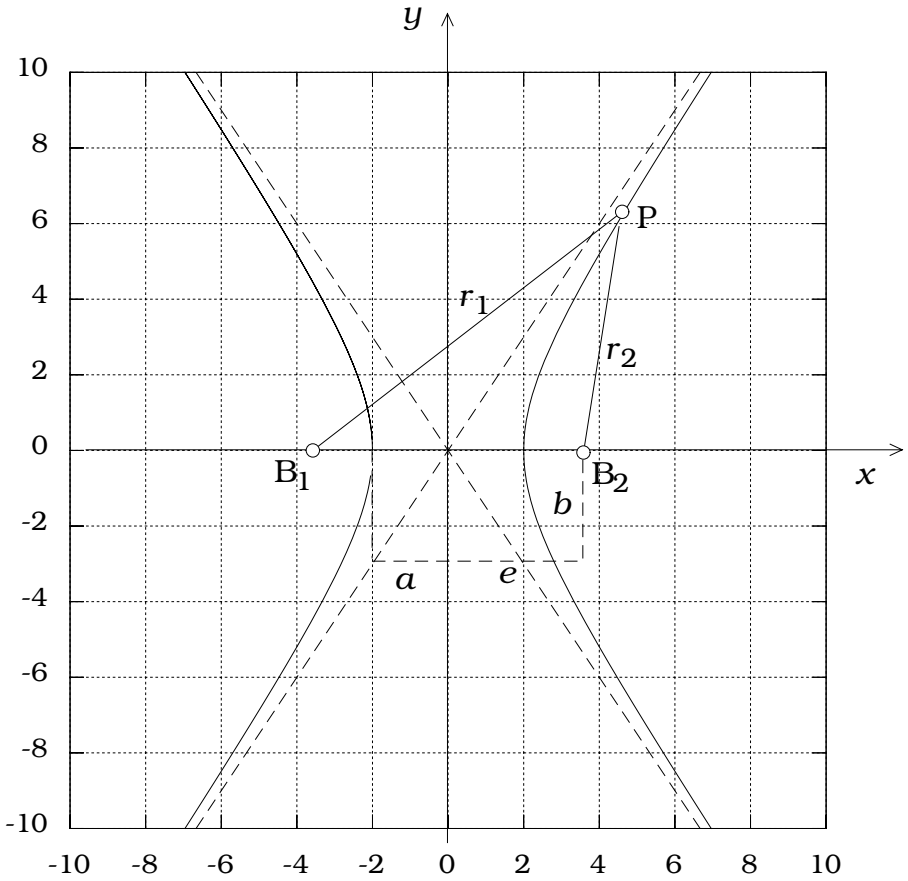
$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

Setzt man r_1 und r_2 in die Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ ein, so erhält man nach elementarer Rechnung die **Gleichung einer Ellipse** in der xy-Ebene um den Koordinatenursprung mit den Halbachsen a und b auf den Koordinatenachsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aus der geometrischen Definition einer Ellipse ergibt sich die „Gärtnerkonstruktion“: Ein Faden der Länge $2a$ wird mit den Endpunkten in B_1 und B_2 befestigt und mit einem Stift in P gespannt. Bewegt man den Stift unter Aufrechterhaltung der Fadenspannung, so beschreibt P eine Ellipse.

Eine **Hyperbel**



($a = 2, \quad b = 3$)

ist der geometrische Ort aller Punkte P, bei denen die *Differenz* der Abstände r_1 und r_2 von zwei Punkten B_1 und B_2 konstant ist.

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Setzt man r_1 und r_2 in die Gleichung $r_1 - r_2 = 2a$ ein, so erhält man die **Gleichung einer Hyperbel** in der xy-Ebene um den Koordinatenursprung und symmetrisch zu den Koordinatenachsen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

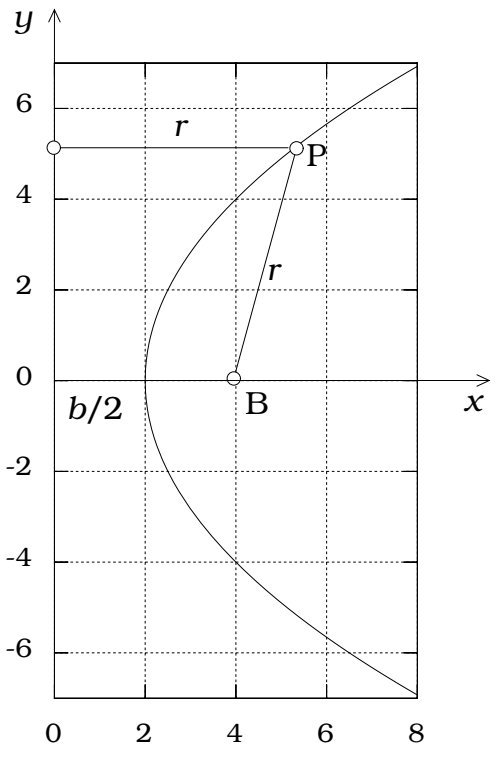
Die Geraden durch den Nullpunkt

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

sind die **Asymptoten** der Hyperbel. Aus der Hyperbelgleichung folgt

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}, \qquad \rightarrow \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b}{a}x.$$

Eine **Parabel**



($b = 2$)

ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt B und einer Geraden jeweils gleiche Abstände haben; B nennt man den Brennpunkt der Parabel.

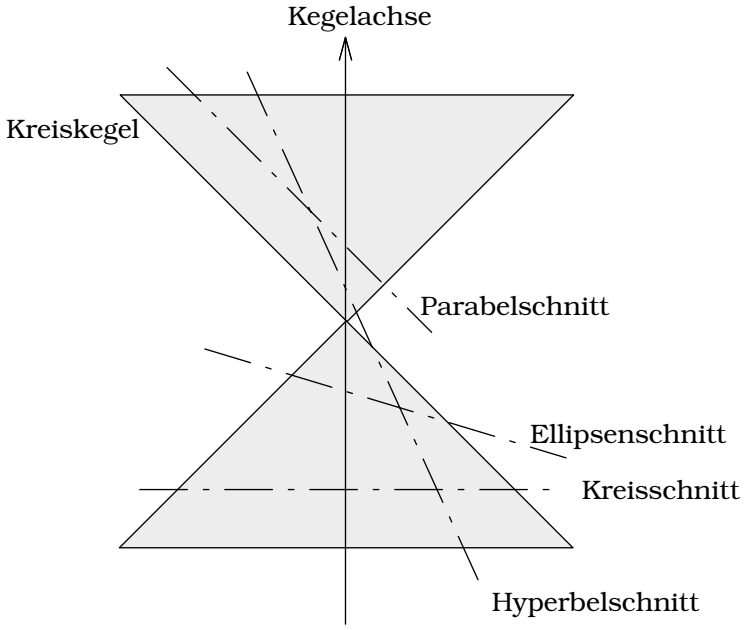
Wir wählen die y-Achse als Bezugsgerade und legen den Punkt B auf die x-Achse.

$$r = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}, \qquad r = x.$$

Dann ergibt sich die **Gleichung einer Parabel** in der xy-Ebene, die symmetrisch zur x-Achse liegt, wenn man die beiden Formeln für die Abstände eines Parabelpunktes P von der Geraden und vom Punkt B gleich setzt:

$$y = \pm\sqrt{2bx - b^2}.$$

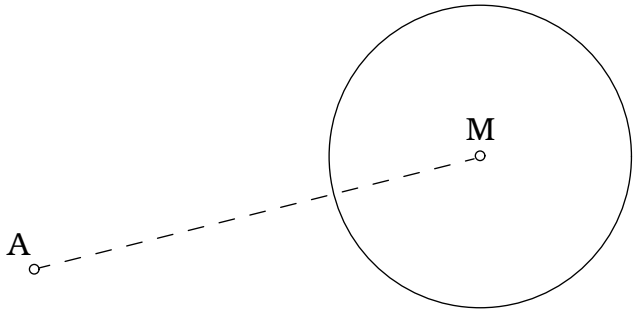
Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel sind Schnittkurven von Kreiskegeln mit unterschiedlich zur Kegelachse geneigten Ebenen.



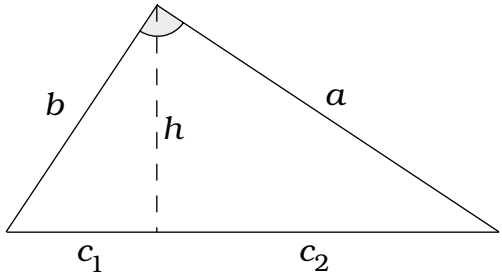
Kegelschnitte

Aufgabe 2.1

Man konstruiere die von A ausgehenden Tangenten an den Kreis um M.



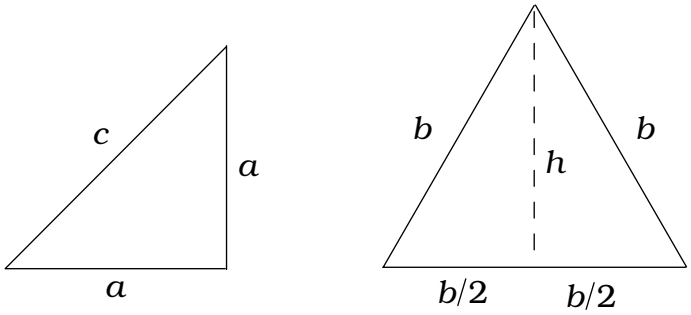
Aufgabe 2.2



Man berechne in dem rechtwinkligen Dreieck die Höhe h aus den Hypotenusenabschnitten c_1 und c_2.

Aufgabe 2.3

Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck berechne man die Hypotenuse c und im gleichseitigen Dreieck die Höhe h.



Aufgabe 2.4

Man berechne den Flächeninhalt eines Trapezes der Höhe h und den parallelen Seiten a und b:

Aufgabe 2.5

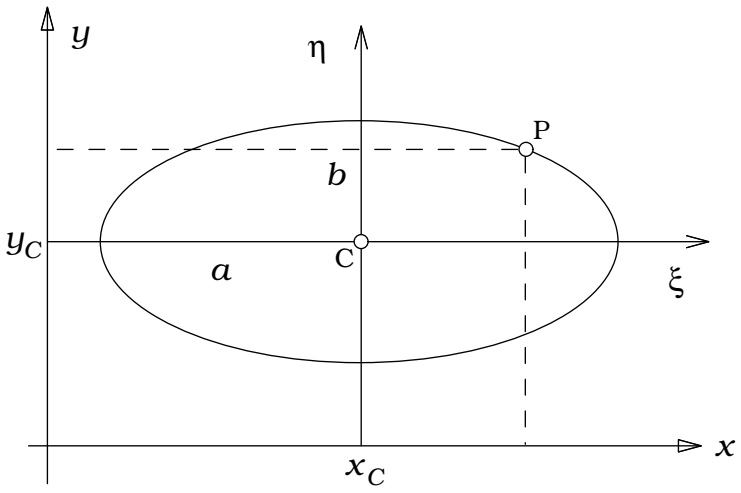
Man berechne den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks, das durch die Koordinaten der drei Eckpunkte in der xy Ebene gegeben ist.

Aufgabe 2.6

Im $\xi\eta$-Koordinatensystem lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1.$$

Wie lautet die Ellipsengleichung im parallel verschobenen xy-System?



Aufgabe 2.7

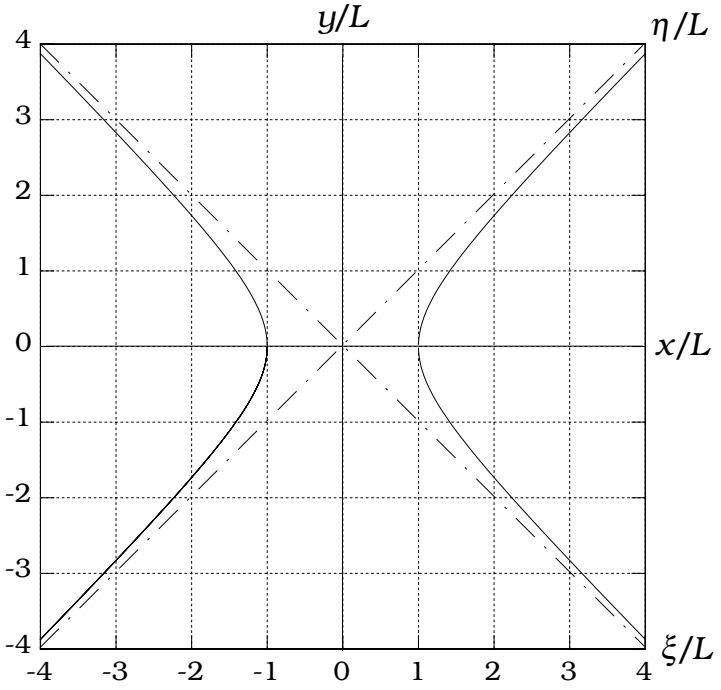
Wie lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$$

in dem um 45^o gedrehten xy-Koordinatensystem?

Aufgabe 2.8

Die beiden Äste der Hyperbel $x^2-y^2=L^2$ haben die Geraden $y=x$ und $y=-x$ zu Asymptoten (gestrichelt). Wie lautet die Hyperbelgleichung im $\xi\eta$-Koordinatensystem der Asymptoten, das um -45^o (im Uhrzeigersinn) gegen das xy-System gedreht ist?



Aufgabe 2.9

Im $\xi\eta$-Koordinatensystem lautet die Gleichung einer Hyperbel

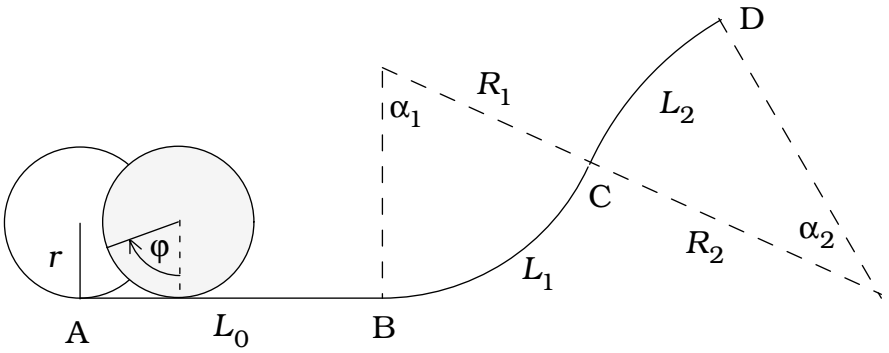
$$\xi\eta = L^2 .$$

Wie lautet die Hyperbelgleichung in dem um 45^o gedrehten xy-System?

Aufgabe 2.10

Gegeben sind die Punkte A:$(-a,0)$, B:$(0,0)$, C:(x_C,y_C). Man berechne den Mittelpunkt M des Kreises, der durch die drei Punkte geht.

Aufgabe 2.11



Ein Rad (Radius r) rollt auf einer Bahn ABCD, die aus einer Geraden und zwei Kreisbögen besteht. Man berechne den Drehwinkel φ des Rades in den Bahnpunkten B, C und D.

Zu den am häufigsten benötigten mathematischen Operationen gehört die wiederholte Produktbildung von Zahlen, Variablen oder Ausdrücken. Für diese **Potenzrechnung** gelten die folgenden Regeln (a,b: reelle Zahlen; n,m: ganze Zahlen):

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \qquad a^0 := 1.$$

$$a^n a^m = a^{(n+m)},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)},$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

$$a^{\frac{1}{m}} =: \sqrt[m]{a}, \qquad a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (\sqrt[m]{a})^n.$$

Merken sollte man sich insbesondere die folgenden Formeln, die bei der Umformung von mathematischen Ausdrücken sehr nützlich sein können:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

▼ Beispiele:

Berechnung der Ellipsengleichung aus der geometrischen Kurvendefinition ($\rightarrow$ Geometrische Grundlagen): Die Summe der Abstände r_1 und r_2 eines Ellipsenpunktes P:(x,y) von den Punkten B_1:$(-e,0)$ und B_2:$(e,0)$ ist konstant $(=2a)$.

$$\underbrace{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{r_1} + \underbrace{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}_{r_2} = 2a.$$

$$(x+e)^2 + y^2 = \{2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\}^2,$$

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex,$$

$$a^2(x^2 - 2ex + e^2 + y^2) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2,$$

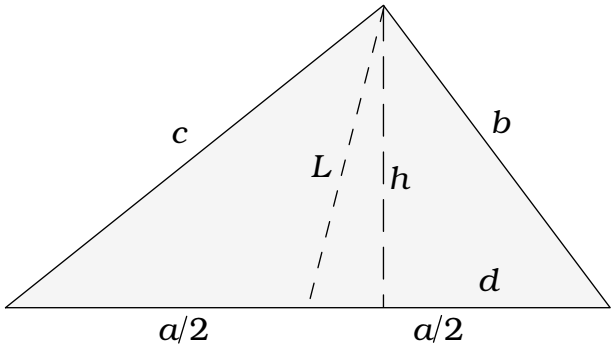
$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1, \qquad b^2 := a^2 - e^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

▲

▼

Berechnung der Länge L einer Seitenhalbierenden in einem Dreieck.



$$L^2 = h^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2,$$

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 \\ h^2 &= c^2 - (a-d)^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad 2h^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2ad - 2d^2,$$

$$2L^2 = 2h^2 + \frac{a^2}{2} - 2ad + 2d^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

▲

Bei der Definition von bestimmten Funktionen und vor allem in der Kombinatorik wird die mit ***n*-Fakultät** bezeichnete Produktbildung von natürlichen Zahlen gebraucht:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Außerdem wird definiert:

$$0! := 1.$$

Aus einer Kombination von Fakultät-Ausdrücken besteht der **Binomialkoeffizient „*n* über *m*“** (n,m: natürliche Zahlen):

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m}$$

Die Funktion

$$P(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ist ein **Polynom *n*-ten Grades**. Die x-Werte, für die $P(x)=0$ wird, nennt man **Nullstellen** des Polynoms. Es existieren immer n Nullstellen. Auch wenn die Koeffizienten a_k des Polynoms reelle Zahlen sind, können die Nullstellen reell oder komplex sein; komplexe Nullstellen treten jedoch immer paarweise konjugiert komplex auf. Mitunter müssen Nullstellen mehrfach gezählt werden. Bezeichnen wir die Nullstellen des Polynoms mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt, wenn $a_n = 1$ ist,

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n).$$

▼ Beispiel:

Die Nullstellen des Polynoms 2. Grades

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

genügen der **quadratischen Gleichung**

$$x^2 + p\,x + q = 0, \qquad p := \frac{a_1}{a_2}, \qquad q := \frac{a_o}{a_2},$$

die in die Form

$$(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

gebracht werden kann, aus der sich die beiden Nullstellen unmittelbar ergeben:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Wenn $q < \frac{p^2}{4}$ ist, sind die beiden Nullstellen reell. Für $q = \frac{p^2}{4}$ erhalten wir die doppelt zu zählende Nullstelle

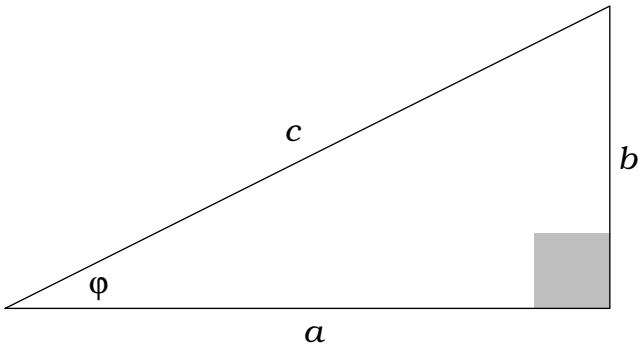
$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

und für $q > \frac{p^2}{4}$ sind die beiden Nullstellen konjugiert komplex ($i := \sqrt{-1}$):

$$\boldsymbol{x}_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \overline{\boldsymbol{x}}_1.$$

▲

Zu den besonders wichtigen Funktionen für die Anwendung der Mathematik in den Natur- und Technikwissenschaften gehören die **trigonometrischen Funktionen** oder **Winkelfunktionen**, die zunächst in einem rechtwinkligen Dreieck als Seitenverhältnisse definiert werden können:



$$\sin\varphi := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c},$$

$$\cos\varphi := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c},$$

$$\tan\varphi := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{c\sin\varphi}{c\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Von geringerer Bedeutung ist die Winkelfunktion

$$\operatorname{cotan}\varphi := \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi}.$$

Aus dem Satz von PYTHAGORAS

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

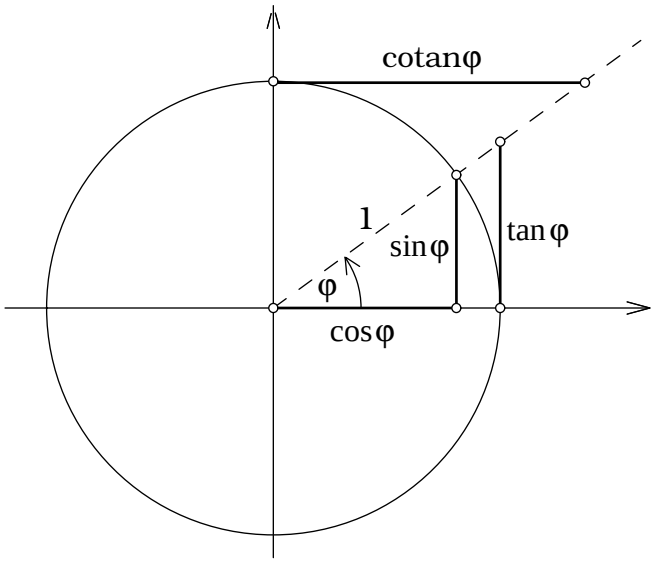
folgt die besonders wichtige Beziehung zwischen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$:

$$(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1.$$

Man schreibt in der Regel

$$(\cos\varphi)^2 =: \cos^2\varphi, \qquad (\sin\varphi)^2 =: \sin^2\varphi.$$

Die trigonometrischen Funktionen können im **Einheitskreis**, weil dann $c = 1$ ist, anschaulich als Strecken dargestellt werden:

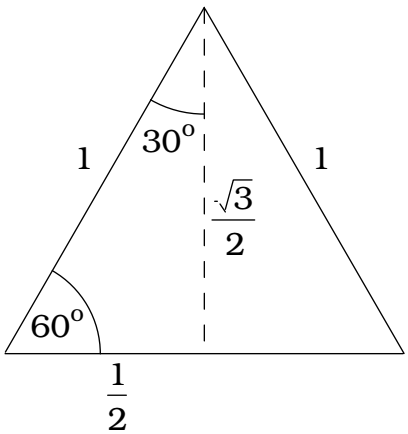


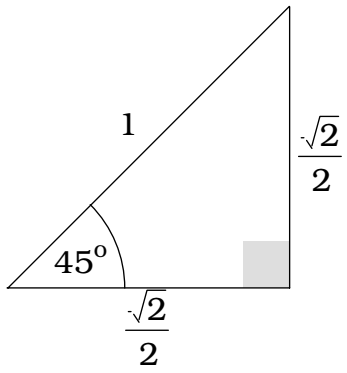
Es gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi, \qquad \tan(-\varphi) = -\tan\varphi,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi) = \sin(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \cos\varphi, \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) = -\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = -\sin\varphi.$$

Empfehlenswert ist es, sich die Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion für spezielle Winkel zu merken. Aus den Winkelgrößen im gleichseitigen und im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck

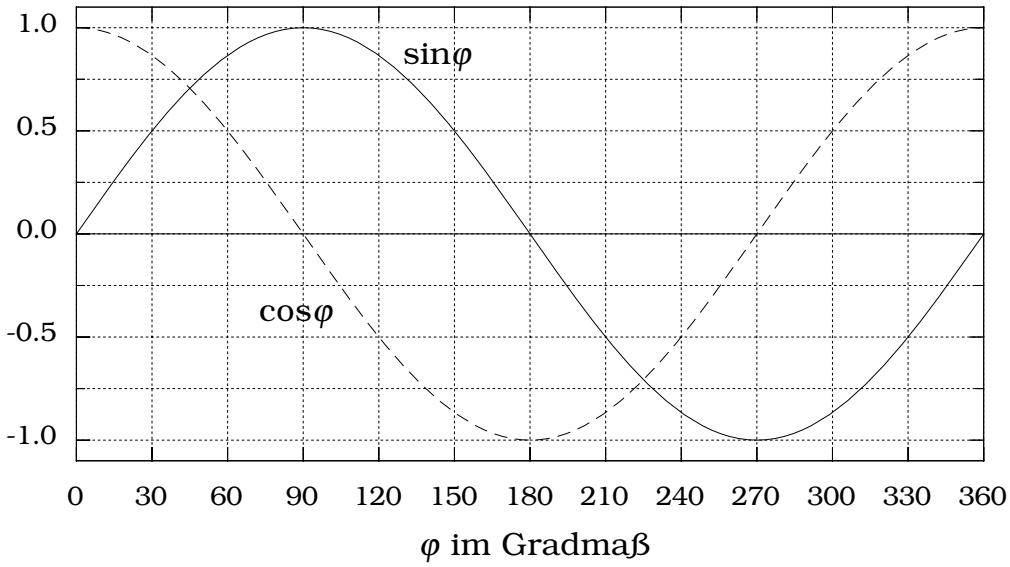




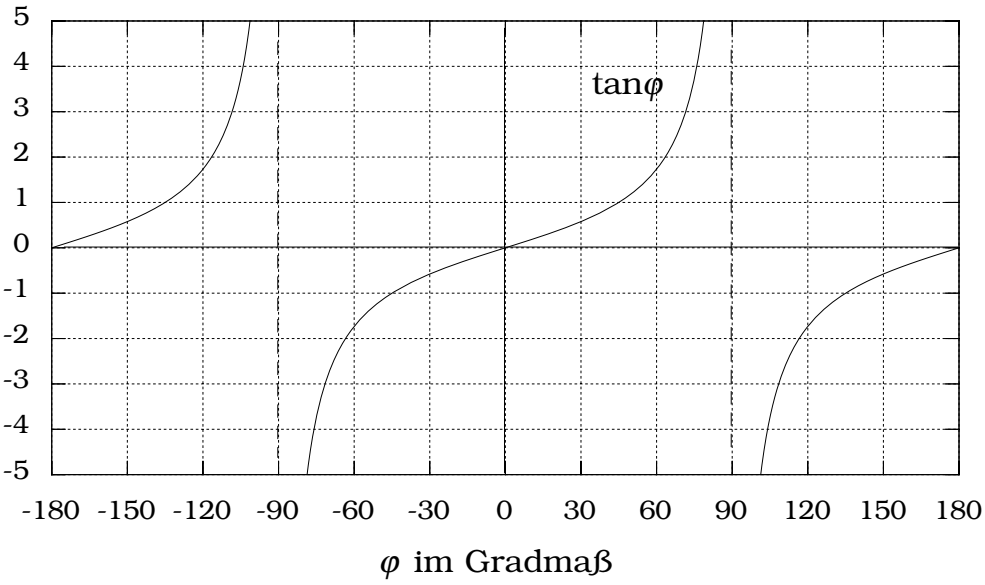
ergeben sich die folgenden Werte:

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$
$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$

Graphen der Winkelfunktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\tan\varphi$:



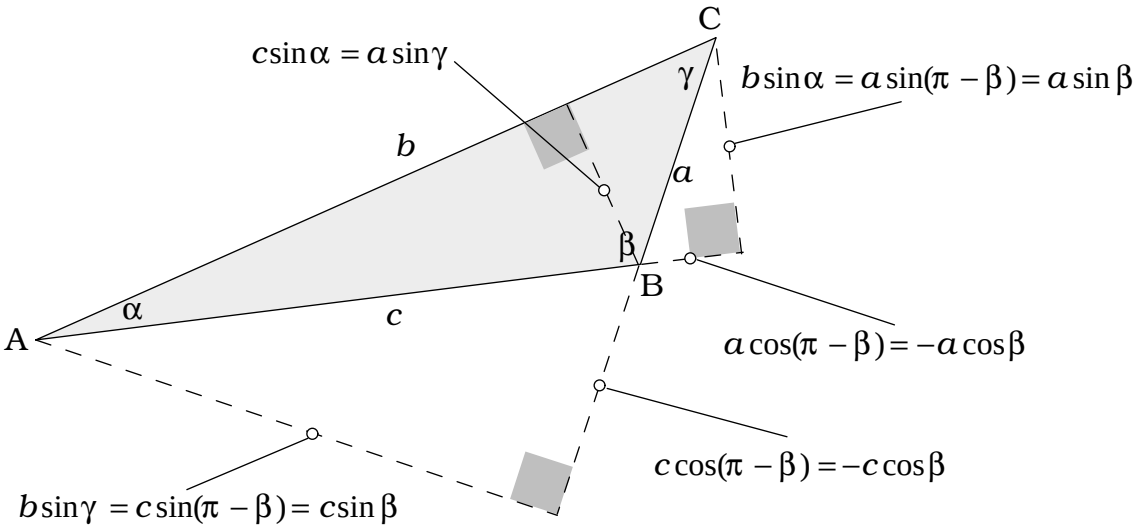
$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi, \qquad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi.$$



$$\tan(\varphi + \pi) = \tan\varphi, \qquad \tan(-\varphi) = -\tan\varphi.$$

▼ Beispiel:

Für die Formulierung von geometrischen Bedingungen bei der mathematischen Modellbildung eines technischen Systems können die folgenden Seiten-Winkel-Beziehungen an einem Dreieck mitunter sehr hilfreich sein.



Sinus-Satz:

$$\begin{aligned} &c\sin\alpha = a\sin\gamma,\\ &a\sin\beta = b\sin\alpha,\\ &b\sin\gamma = c\sin\beta; \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Cosinus-Satz:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha - c)^2 \quad &\rightarrow \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= (c\sin\beta)^2 + (a - c\cos\beta)^2 \quad &\rightarrow \quad b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,\\ c^2 &= (b\sin\gamma)^2 + (b\cos\gamma - a)^2 \quad &\rightarrow \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\cos\gamma + c\cos\alpha &= b,\\ b\cos\alpha + a\cos\beta &= c,\\ c\cos\beta + b\cos\gamma &= a. \end{aligned}$$

Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta.$$

▲

Häufig werden bei der Vereinfachung von Ausdrücken, die trigonometrische Funktionen enthalten, die folgenden **Additionstheoreme** gebraucht:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\cos(k+m)\varphi=\cos k\varphi\cos m\varphi-\sin k\varphi\sin m\varphi,$$

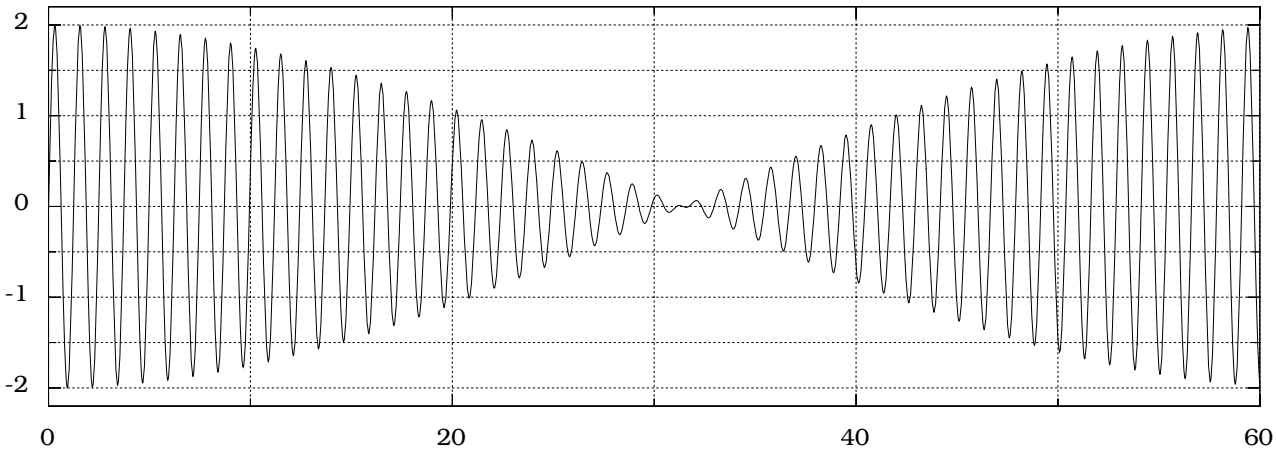
$$\sin(k+m)\varphi=\sin k\varphi\cos m\varphi+\sin m\varphi\cos k\varphi,$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Weitere Beziehungen findet man in Formelsammlungen über trigonometrische Funktionen.

▼ Beispiel:
Überlagerung von Sinusfunktionen mit leicht unterschiedlichem Argument:

$$y(x)=\sin(5x)+\sin(5{,}1x)=2\sin(5{,}05x)\cos(0{,}05x)$$



„Schwebung“

▲

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind die **arcus-Funktionen**:

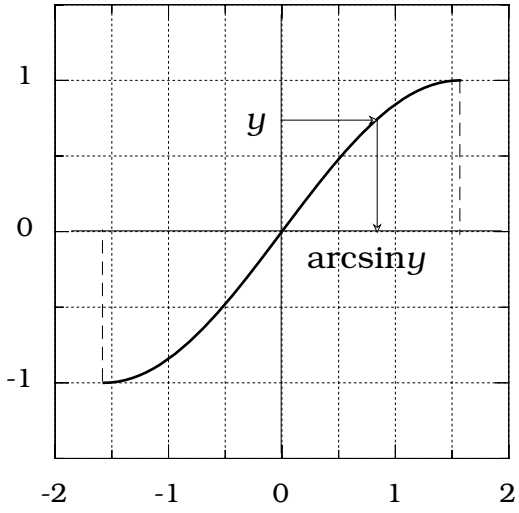
$$y=\sin\varphi \quad\leftrightarrow\quad \varphi=\arcsin y \qquad (-1\le y\le 1),\quad (-\pi/2\le\varphi\le\pi/2)$$

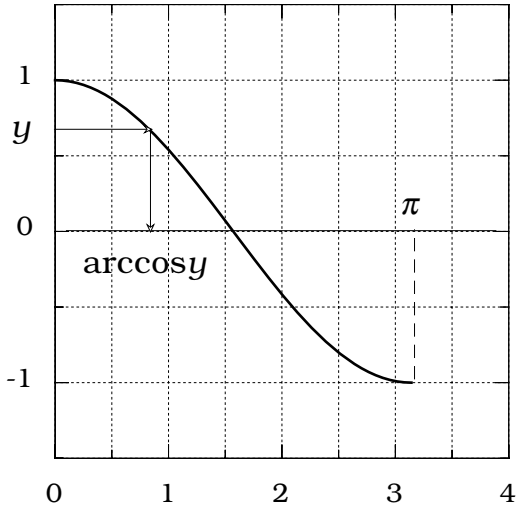
$$y=\cos\varphi \quad\leftrightarrow\quad \varphi=\arccos y \qquad (-1\le y\le 1),\quad (0\le\varphi\le\pi)$$

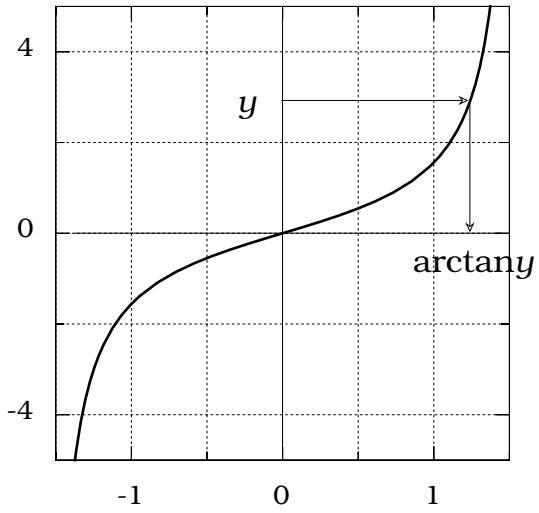
$$y=\tan\varphi \quad\leftrightarrow\quad \varphi=\arctan y \qquad (-\infty\le y\le\infty),\quad (-\pi/2\le\varphi\le\pi/2)$$

Insbesondere sind dabei die y-Definitionsbereiche zu beachten.

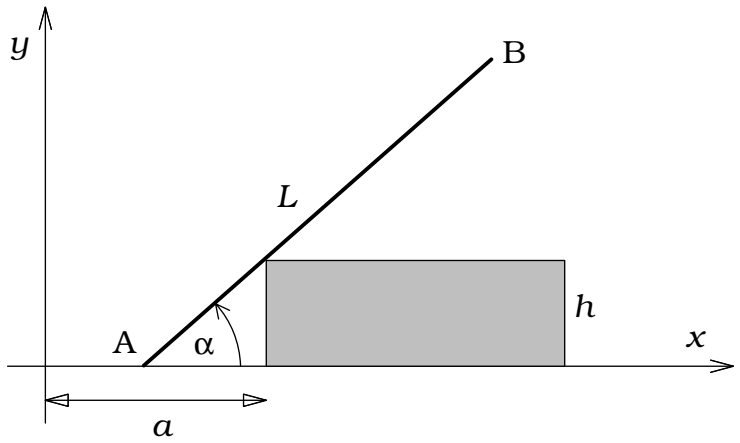
Bestimmung von Funktionswerten der arcus-Funktionen:







▼ Beispiele:



Eine Stange der Länge L wird über eine Stufe der Höhe h geschoben. Man berechne den Neigungswinkel α und die Koordinaten des Endpunktes B als Funktionen der Koordinate x_A des Stangenpunktes A.

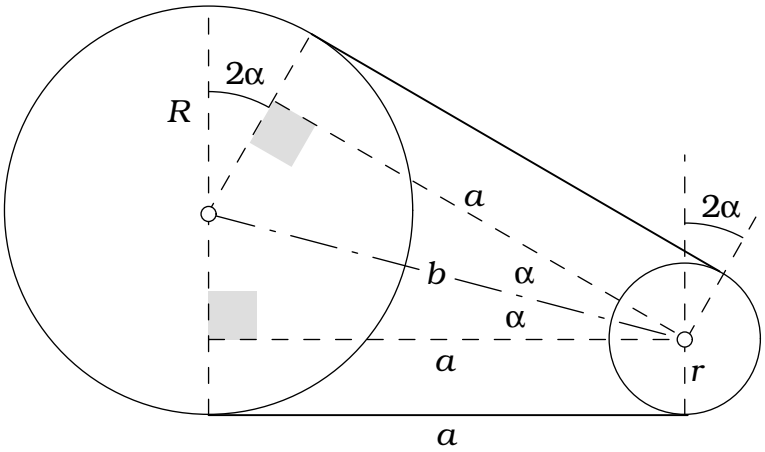
$$\tan\alpha = \frac{h}{a - x_A}, \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{h}{a - x_A}.$$

$$x_B = x_A + L\cos(\arctan\frac{h}{a - x_A}),$$

$$y_B = L\sin(\arctan\frac{h}{a - x_A}).$$

▲

▼



Um zwei Kreisscheiben mit den Radien R und r, deren vertikale Durchmesser den Abstand a haben, soll ein straff gespannter Riemen gelegt werden. Man berechne den erforderlichen Umfang U.

$$\tan\alpha = \frac{R-r}{a}, \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{R-r}{a}.$$

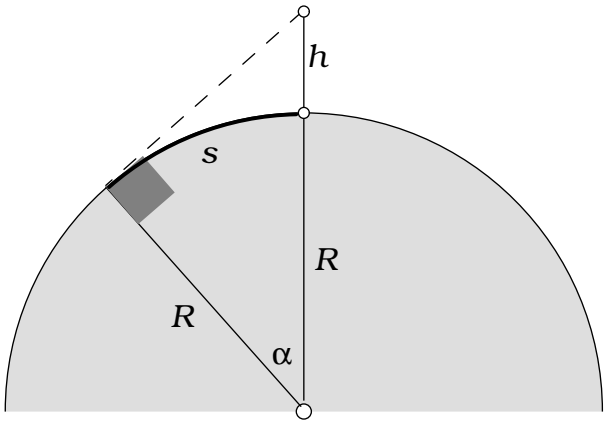
$$U = 2a + R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha),$$

$$U = 2a + (R+r)\pi + 2(R-r)\arctan\frac{R-r}{a}.$$

▲

▼

Bis zu welcher Entfernung s auf der Eroberfläche kann man von einem Turm der Höhe h bei ungetrübter Aussicht sehen, wenn die Erde als ideale Kugel mit dem Radius $R = 6370$ km angenommen wird?



$$(R+h)\cos\alpha = R, \qquad \rightarrow \qquad \alpha = \arccos\frac{1}{1+h/R}; \qquad s = R\alpha.$$

$h = 10\text{m} \quad s = 11\text{km}$

$h = 100\text{m} \quad s = 36\text{km}$

▲

▼

Das Ergebnis der Addition einer Sinus- und einer Cosinusfunktion mit gleichem Argument φ kann durch eine entsprechende Sinusfunktion mit dem Argument $(\varphi + \alpha)$ ausgedrückt werden:

$$C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi = A\sin(\varphi + \alpha).$$

Mit dem Additonstheorem für die Sinusfunktion

$$\sin(\varphi + \alpha) = \sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha$$

wird

$$C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi = A\{\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha\}$$

und ein Vergleich der Faktoren von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$A\cos\alpha = C_1, \qquad A\sin\alpha = C_2,$$

also

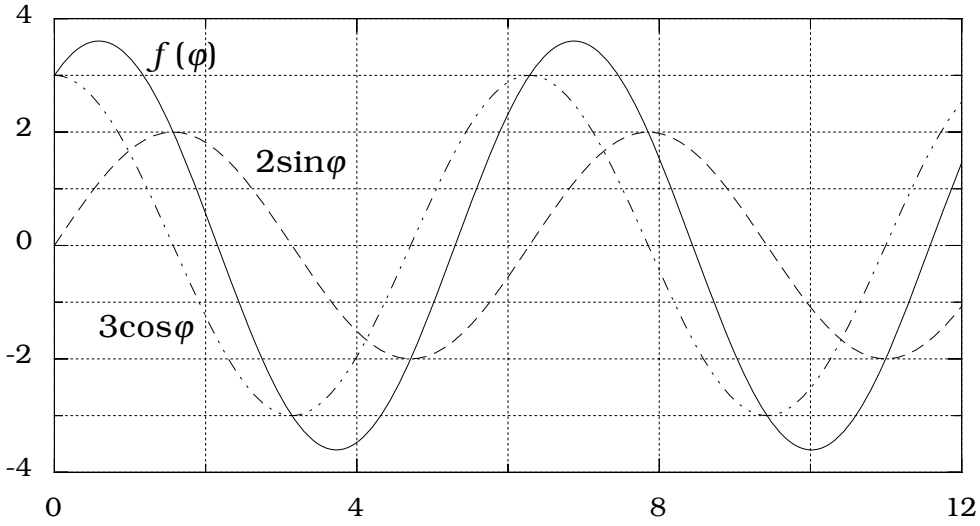
$$A = \sqrt{C_1{}^2 + C_2{}^2}, \qquad \alpha = \arctan(C_2/C_1).$$

Von den beiden äquivalenten Darstellungen der Funktion

$$f(\varphi) = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi = A\sin(\varphi + \alpha)$$

ist die erste mitunter rechentechnisch vorteilhaft und die zweite darstellungstechnisch: Die Funktion $f(\varphi)$ ist eine Sinusfunktion mit der Amplitude A und bei $\varphi = -\alpha$ hat sie einen Nullpunkt.

$$f(\varphi) = 2\sin\varphi + 3\cos\varphi = \sqrt{13}\sin(\varphi + \arctan(3/2))$$

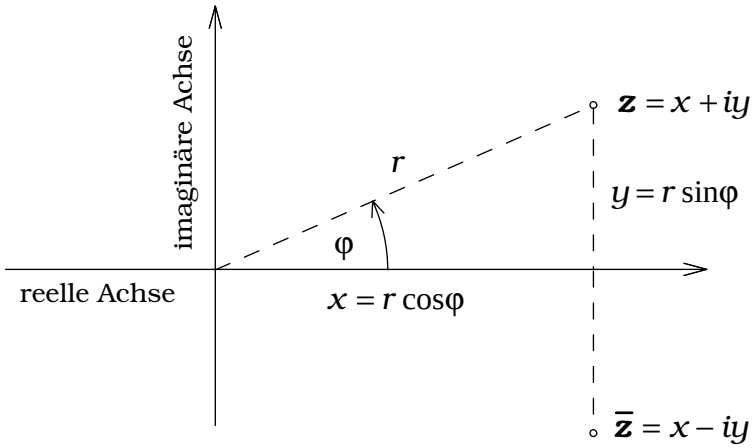


▲

In der **Gaußsche**n **Zahlenebene** können die aus einem Real- und einem Imaginärteil bestehenden komplexen Zahlen

$$\boldsymbol{z} = x + iy$$

als Punkte dargestellt werden. Dabei ist es üblich, für den Realteil x die horizontale und für den Imaginärteil y die vertikale kartesische Achse mit jeweils gleichem Maßstab zu verwenden.



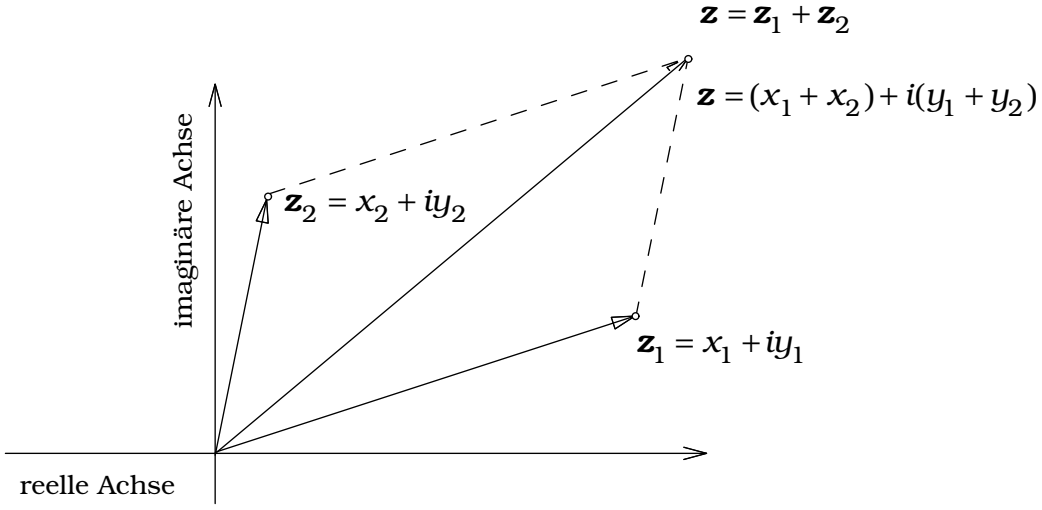
Außerdem läßt sich die Lage der Zahlenpunkte mit Hilfe der **Polarkoordinaten** r und φ beschreiben, wobei

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Aus der Polarkoordinatendarstellung ergibt sich die Pfeildarstellung, bei der der komplexen Zahl z vom Nullpunkt aus ein Pfeil der Länge r zugeordnet wird, der mit der reellen Achse den Winkel φ bildet. Die Addition von komplexen Zahlen läßt sich dann graphisch als Pfeiladdition darstellen:

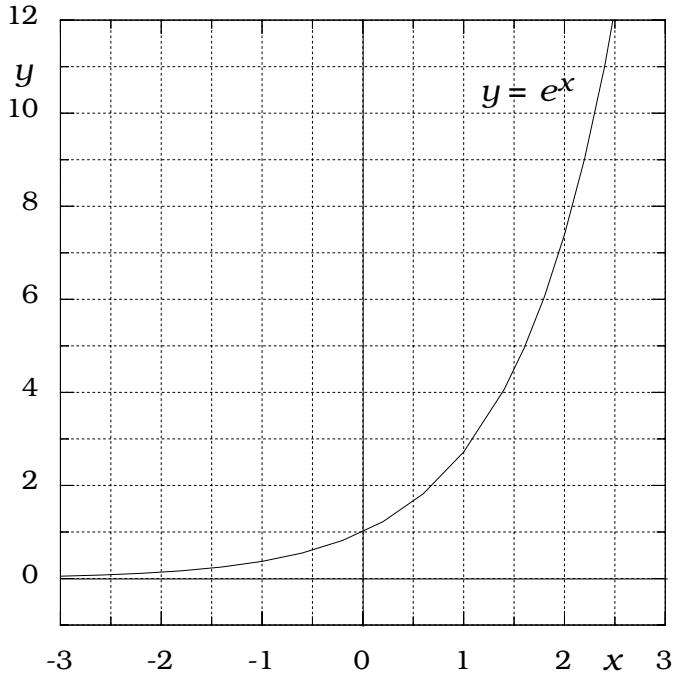


Zu den interessantesten mathematischen Funktionen gehört die **Exponentialfunktion** (***e*-Funktion**), die folgendermaßen definiert ist (x: reelle Zahl):

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e = e^1 = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}71828182846\ldots$$

Graph der Exponentialfunktion:



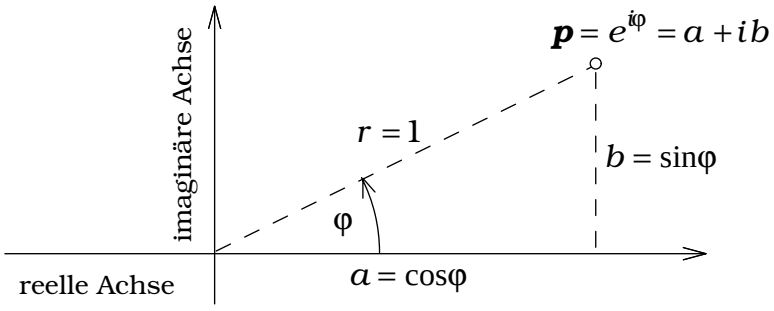
Wenn der Definitionsbereich der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen erweitert wird, erhalten wir insbesondere für die rein-imaginäre Zahl $i\varphi$ im Exponenten:

$$\boldsymbol{p} = e^{i\varphi}, \qquad \overline{\boldsymbol{p}} = e^{-i\varphi}, \qquad \rightarrow \qquad |\boldsymbol{p}|^2 = \boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{p}} = e^{i(\varphi-\varphi)} = e^0 = 1.$$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots$$

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \ldots\}}_{a} + i\ \underbrace{\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \ldots\}}_{b},$$

Die komplexe Zahl $\boldsymbol{p} = e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis.



Die Abbildung erklärt die sehr praktische **EULERsche Formel**

$$e^{i\varphi} = \exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Mit dieser Darstellung der komplexwertigen Exponentialfunktion erhalten wir die **Reihendarstellungen** der Sinus- und der Cosinusfunktion:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \ldots$$

und die recht guten Näherungswerte der Sinus- und Cosinusfunktionen für Winkel φ, deren Betrag im Bogenmaß(!) im Vergleich mit 1 sehr klein ist ($|\varphi| << 1$).

Beispielsweise wird

$$\sin(0{,}1)_{\text{exakt}} = 0{,}099833... \approx 0{,}1 \qquad \cos(0{,}1)_{\text{exakt}} = 0{,}995004... \approx 1{,}0 \quad .$$

Die Darstellung beliebiger komplexer Zahlen

$$\boldsymbol{z} = x + iy$$

in Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{z} = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi,$$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

lautet bei Verwendung der EULERschen Formel:

$$\boldsymbol{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} = r\exp(i\varphi).$$

Für die zu $\boldsymbol{z}$ konjugiert komplexe Zahl gilt

$$\overline{\boldsymbol{z}} = re^{-i\varphi}.$$

Eine negative reelle Zahl $-a$ lautet in komplexer Schreibweise

$$-a = ae^{i\pi}.$$

Die Multiplikation und Division mit komplexen Zahlen läßt sich mit Hilfe der EULERschen Formel besonders leicht ausführen:

$$\boldsymbol{z}_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \boldsymbol{z}_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \qquad \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \dfrac{\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \end{cases}$$

Auch Additionstheoreme der Winkelfunktionen sind mit der EULERschen

Formel schnell herzuleiten.

▼ Beispiele:

Berechnung von $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta),$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)}_{\sin(\alpha+\beta)}.$$

▲

▼

Berechnung von $\cos(3\alpha)$ und $\sin(3\alpha)$ als Funktionen von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$:

$$e^{i3\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$$

$$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = (\cos\alpha)^3 + 3(\cos\alpha)^2 i\sin\alpha + 3\cos\alpha(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

▲

▼

Darstellung von $\cos\alpha + \cos\beta$ und $\sin\alpha + \sin\beta$ durch Produkte von Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}),$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta) = (\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2})2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

▲

Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig, die **Hyperbelfunktionen** einzuführen.

In Analogie zu

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

wird definiert:

Cosinushyperbolicus: $$\cosh x := \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}),$$

Sinushyperbolicus: $$\sinh x := \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...,$$

und in Analogie zur trigonometrischen Tangensfunktion

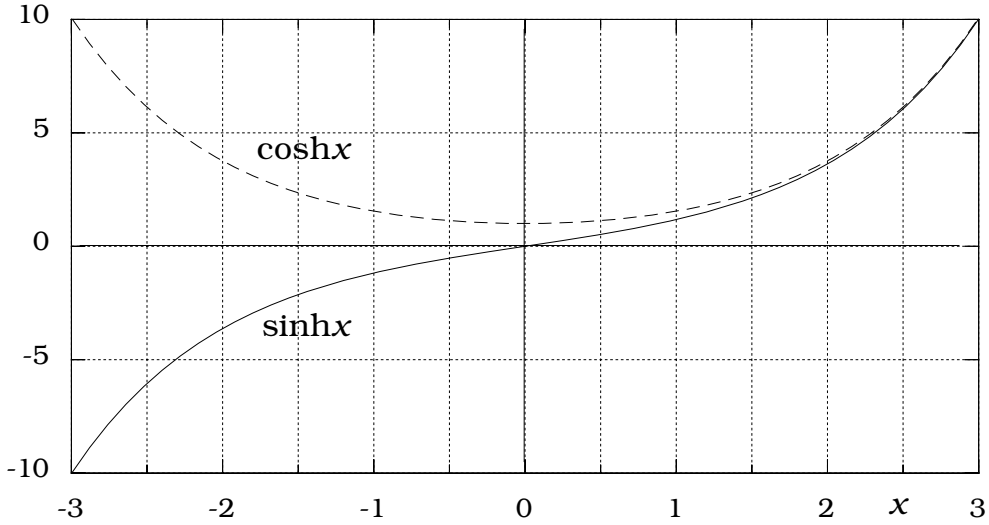
Tangenshyperbolicus: $$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

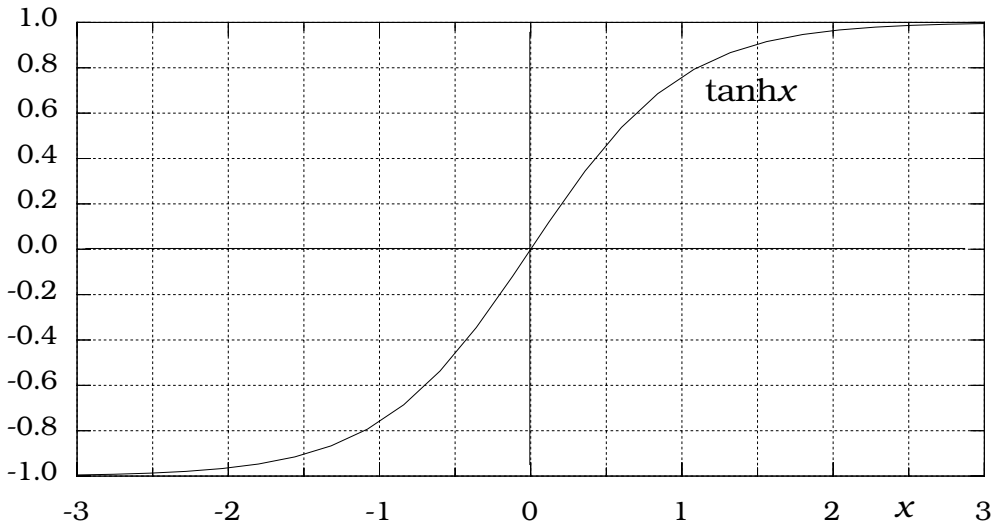
Definitionsgemäß gilt:

$$\sinh(0) = 0, \qquad \cosh(0) = 1,$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \qquad \cosh(-x) = \cosh x.$$

Graphen der Hyperbelfunktionen:





Aus

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$
$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}),$$

folgt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

und mit

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y = (\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y),$$
$$e^{-(x+y)} = e^{-x} e^{-y} = (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y),$$

erhalten wir die Additionstheoreme

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen sind die **Area-Funktionen**:

$$y = \sinh x \quad \leftrightarrow \quad x = \operatorname{arsinh} y \qquad -\infty < y < \infty$$
$$y = \cosh x \quad \leftrightarrow \quad x = \operatorname{arcosh} y \qquad y \geq 1 \quad .$$
$$y = \tanh x \quad \leftrightarrow \quad x = \operatorname{artanh} y \qquad -1 < y < 1$$

Zu den wichtigen Kurven in der xy-Ebene gehören der **Kreis**, die **Ellipse** und die **Hyperbel**. Sie können jeweils durch eine Beziehung zwischen den Koordi-

naten x und y oder in einer Parameterdarstellung mit λ als Kurvenparameter beschrieben werden:

Kreis: $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1,$ oder $x=r\cos\lambda,\quad y=r\sin\lambda;$

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ oder $x=a\cos\lambda,\quad y=b\sin\lambda;$

Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ oder $x=a\cosh\lambda,\quad y=b\sinh\lambda.$

Die **Logarithmusfunktionen** sind die Umkehrfunktionen der Exponentialausdrücke. In der Gleichung

$$b^x=a$$

ist x der Logarithmus der Zahl a zur Basis b.

$$x=\log_b a.$$

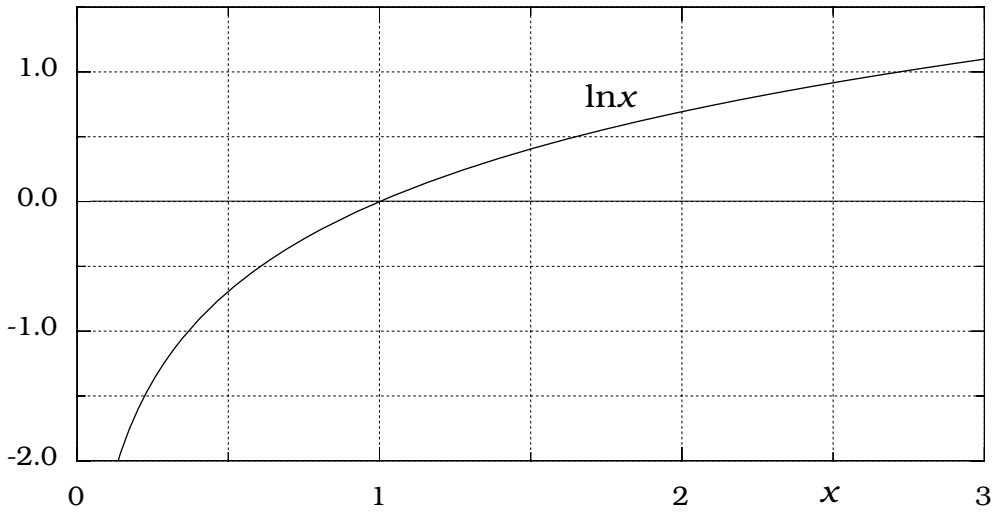
Wählt man insbesondere als Basis b die transzendente Zahl e, so gilt

$$e^x=a \quad\leftrightarrow\quad x=\log_e a=:\ln a.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der **Logarithmus zur Basis e** oder **Logarithmus naturalis**:

$$y=\ln x \quad\leftrightarrow\quad x=e^y \qquad \{0<x<\infty\},\{-\infty<y<\infty\}$$

$$x=e^{\ln x},\qquad \ln(e^x)=x. \qquad \ln(1)=0,\qquad \ln(e)=1.$$



Rechenregeln und Anwendungen der Logarithmusfunktion:

$$xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{(\ln x + \ln y)} \quad \rightarrow \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\frac{x}{y} = e^{\ln x} e^{-\ln y} = e^{(\ln x - \ln y)} \quad \rightarrow \quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y,$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \qquad (a > 0).$$

$$x^k = (e^{\ln x})^k = e^{k \ln x}, \qquad (x > 0).$$

Natürlicher Logarithmus von komplexen Zahlen:

$$\boldsymbol{z} = x + iy = re^{i\varphi}, \quad \rightarrow \quad \ln \boldsymbol{z} = \ln r + i\varphi.$$

Natürlicher Logarithmus von negativen reellen Zahlen:

$$\ln(-a) = \ln(ae^{i\pi}) = \ln a + i\pi.$$

▼ Beispiele:

Die Umkehrfunktion der Hyperbelfunktion

$$y = \sinh x$$

lautet

$$x = \operatorname{arsinh} y.$$

Weil

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{1 + y^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ist, wird

$$y + \sqrt{1 + y^2} = e^x$$

also

$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = \operatorname{arsinh} y.$$

▲

▼

Zur Hyperbelfunktion

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

gehört die Umkehrfunktion

$$x = \operatorname{artanh} y.$$

Aus

$$y(e^{2x}+1) = e^{2x}-1, \qquad \rightarrow \qquad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

folgt schließlich

$$x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \operatorname{artanh} y.$$

▲

Die Umkehrfunktion der Zehnerpotenzfunktion ist der **Logarithmus zur Basis 10** (gewöhnlicher Logarithmus):

$$\log_{10} a =: \log a,$$

$$y = \log x \qquad \leftrightarrow \qquad x = 10^y \qquad \{0 < x < \infty\}, \{-\infty < y < \infty\}$$

$$x = 10^{\log x}, \qquad \log(10^x) = x.$$

$$\log(1) = 0, \qquad \log(10) = 1.$$

Beziehung zwischen $\log x$ und $\ln x$:

$$x = 10^{\log x} = (e^{\ln(10)})^{\log x} = e^{\ln(10)\log x} \qquad \rightarrow \qquad \ln x = \ln(10)\log x,$$

$$\ln(10) = 2{,}302585...$$

$$\log x = \frac{1}{\ln(10)}\ln x = 0{,}43429\ln x.$$

Jede positive reelle Zahl x kann dargestellt werden in der Form

$x = a,bcde...10^n, \qquad a,b,c,... \in \{0,1,2,...,9\}, \qquad a \neq 0,$ n: ganze Zahl.

Daraus folgt

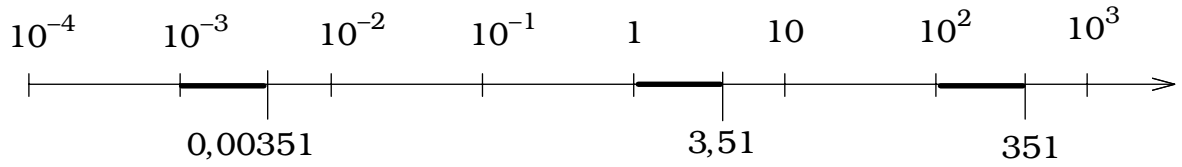
$$\log x = \log(a,bcde...) + \log(10^n) = n + \log(a,bcde...).$$

Beispielsweise gilt:

$$x = 0{,}00351 = 3{,}51\cdot 10^{-3} \qquad \rightarrow \qquad \log x = -3 + \log(3{,}51) = -3 + 0{,}545307,$$

$$x = 351 = 3{,}51\cdot 10^{2} \qquad \rightarrow \qquad \log x = 2 + \log(3{,}51) = 2 + 0{,}545307.$$

Diese Beziehungen bilden die Grundlage für logarithmisch geteilte Skalen bei der Erfassung von großen Definitions- und/oder Wertebereichen in der graphischen Darstellung von Funktionen.



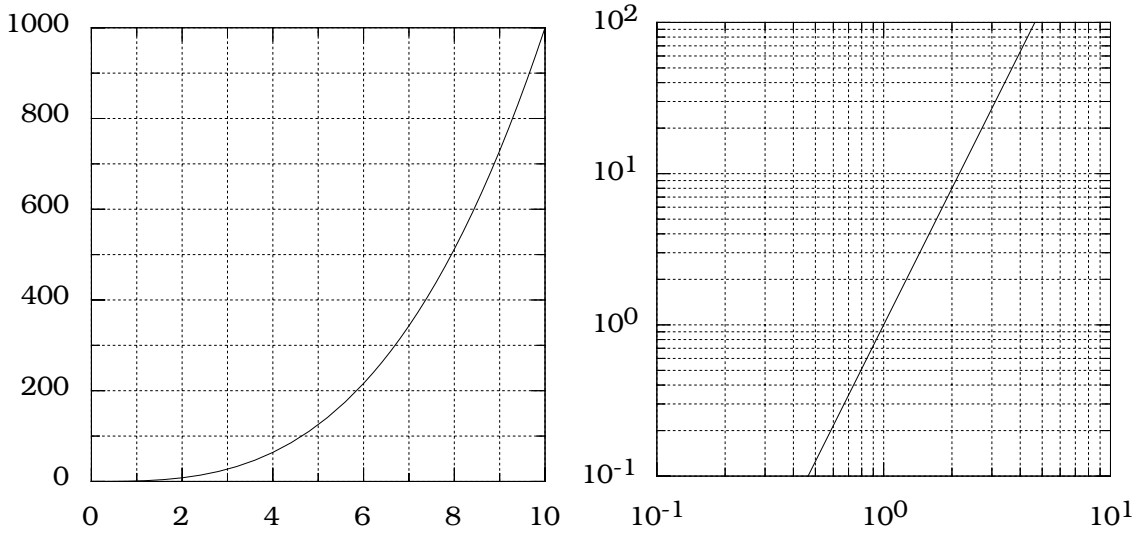
Darstellungsbereich: Sieben Zehnerpotenzen.

Es können allerdings nur positive reelle Zahlen logarithmisch dargestellt werden.

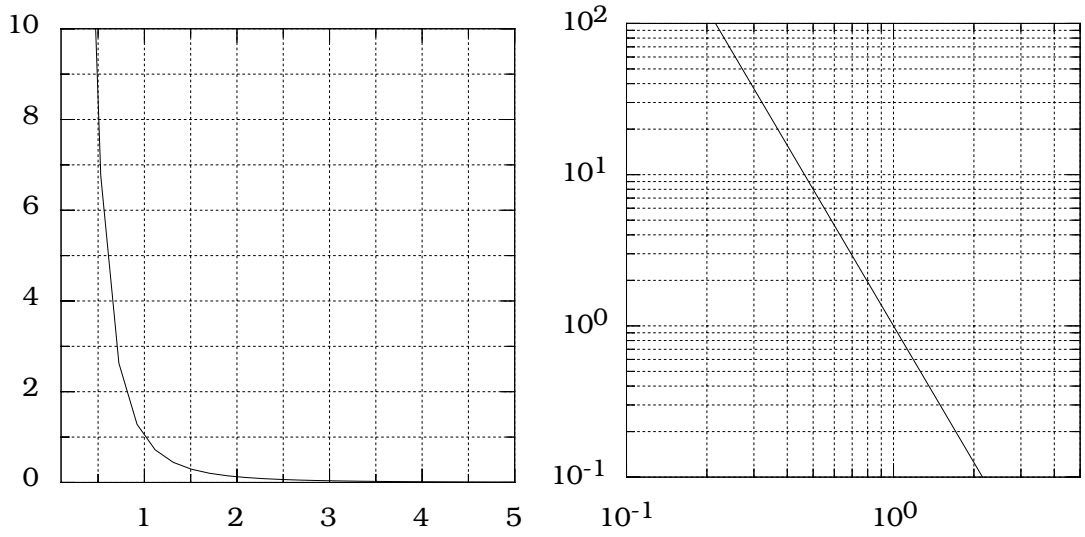
▼ Beispiel:
Die Graphen von Funktionen ändern sich mit den Achsenskalierungen. So sind beispielsweise die Graphen der Funktionen $y = x^3$ und $y = x^{-3}$ bei linearen Achsenteilungen gekrümmt und bei logarithmischer Teilung der Achsen Geraden.

$$y = x^3 \quad \rightarrow \quad \log y = 3 \log x$$
$$y = x^{-3} \quad \rightarrow \quad \log y = -3 \log x$$

$y = x^3$



$$y = x^{-3}$$



▲

▼ Beispiel:

Die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres ist abhängig von der Frequenz der Schallwellen. Bei 400 Hz (= 400 Schwingungen/Sekunde) liegt die Hörschwelle bei einer Schallintensität von

$$I = 7.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Wm^{-2}}, \qquad (1\mathrm{W} := 1\mathrm{Watt} = 1\mathrm{Nms^{-1}}).$$

Bezieht man die Intensität des Schalls auf

$$I_0 := 1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{Wm^{-2}},$$

so ist

$$B := 10 \cdot \log(I/I_0)$$

der in dB (Dezibel) gemessene Schallpegel. Die Hörschwelle für 400 Hz liegt also bei

$$B_{400} = 10 \cdot \log(7.2)\,\mathrm{dB} = 8.57\,\mathrm{dB}.$$

▲

Fast alle bisher vorgestellten Funktionen $y = f(x)$ sind in ihrem Definitionsbereich **stetig**. Das bedeutet anschaulich: Bei beliebig kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen x um Δx wird die Differenz

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

beliebig klein. Eine Funktion $y = f(x)$ heißt also an einer Stelle $x = a$ ihres Definitionsbereiches stetig, wenn der **Grenzwert** (Limes)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

existiert.

Die Funktion $f(x) = \tan x$ ist beispielsweise an der Stelle $x = \pi/2$ unstetig denn es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tan(\pi/2 - \varepsilon) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \tan(\pi/2 + \varepsilon) = -\infty.$$

Eine Unstetigkeit an der Stelle $x = a$ kann aber auch ein endlicher Sprung sein:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(a - \varepsilon) =: f(a-) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} f(a + \varepsilon) =: f(a+)$$

$f(x)$ springt an der Stelle $x = a$, wenn wir sie in positiver x-Richtung durchlaufen, vom Funktionswert $f(a-)$ auf den Funktionswert $f(a+)$. Im Punkt $x = a$ kann man dann beispielsweise vereinbaren, daß

$$f(a) = \frac{f(a+) + f(a-)}{2}$$

sein soll.

Aufgabe 3.1

Man berechne die Massendichte von Eisen ($\rho = 7{,}86$ Gramm/Kubikzentimeter) sowie das spezifische Gewicht $\gamma := \rho g$ in den Einheiten der Kraft (1 N), der Länge (1 m) und der Zeit (1 s).

Aufgabe 3.2

Man bestimme alle Argumente der Sinus- und Cosinusfunktionen im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$, die den Funktionswert $\sin\alpha$ liefern.

Aufgabe 3.3

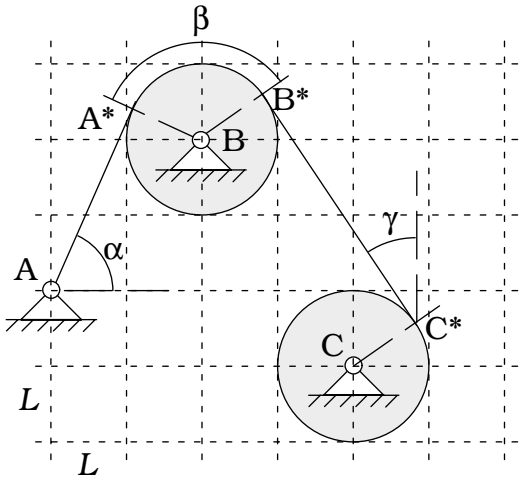
Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz ergibt wieder eine harmonische Schwingung mit dieser Frequenz:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

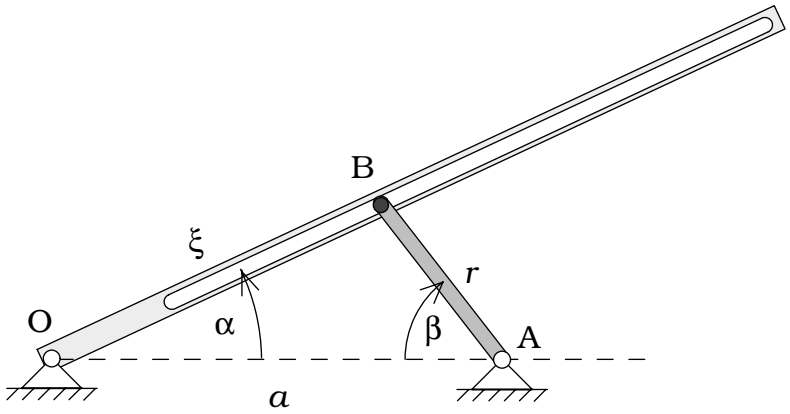
Man berechne die Amplitude A und den Phasenwinkel φ.

Aufgabe 3.4

Ein in A befestigtes Seil wird über die in B gelagerte Umlenkrolle geführt und ist auf die in C gelagerte Kreisscheibe aufgewickelt. Man berechne den Umlenkwinkel β sowie $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\gamma$ und $\cos\gamma$.



Aufgabe 3.5



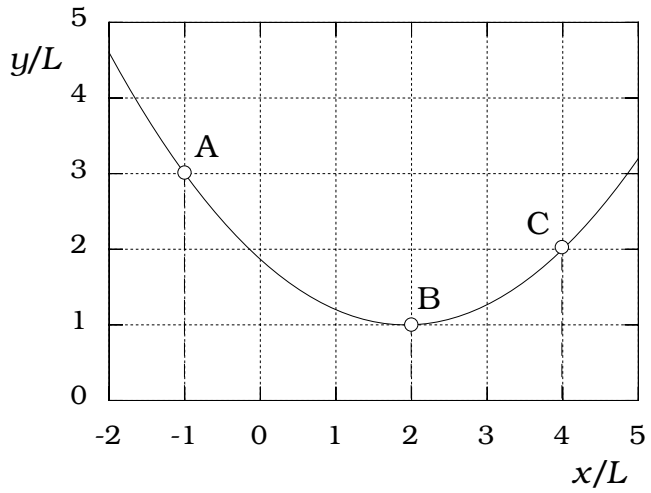
Die in O drehbar gelagerte Stange ist mit einem Führungsschlitz versehen, in dem der Endpunkt B der in A gelagerten Kurbel AB gleiten kann. Man berechne den Drehwinkel α als Funktion des Kurbelwinkels β.

Aufgabe 3.6

Durch drei Punkte A: (x_A, y_A), B: (x_B, y_B) und C: (x_C, y_C) mit unterschiedlichen x-Koordinaten ist eine Parabel 2. Grades

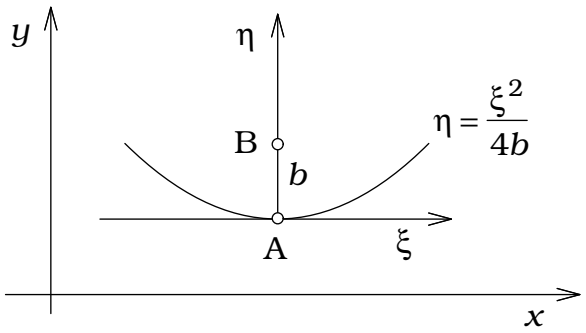
$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

definiert. Man berechne die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.



Aufgabe 3.7

Die Funktion $\eta = \xi^2/(4b)$ beschreibt eine Parabel mit dem Scheitelpunkt A und dem Brennpunkt B auf der η-Achse.

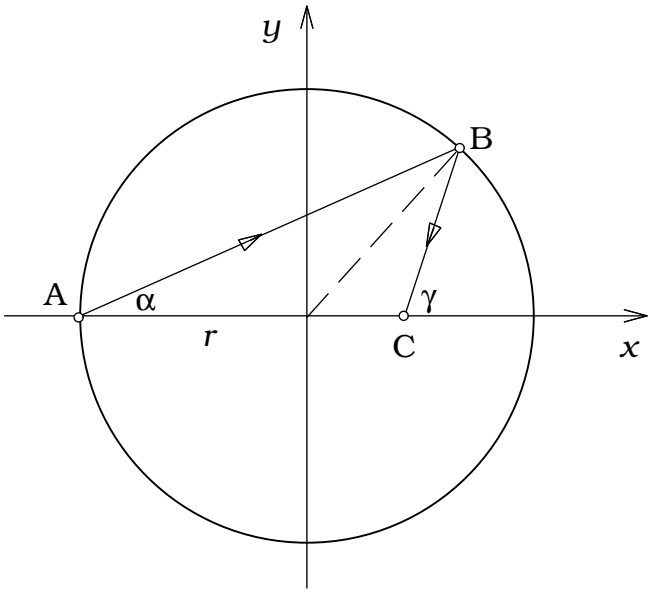


Wie lautet die Gleichung dieser Parabel im xy-Koordinatensystem? Mit Hilfe dieses Ergebnisses berechne man die Koordinaten des Scheitelpunktes und des Brennpunktes der Parabel

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad (a_2 > 0).$$

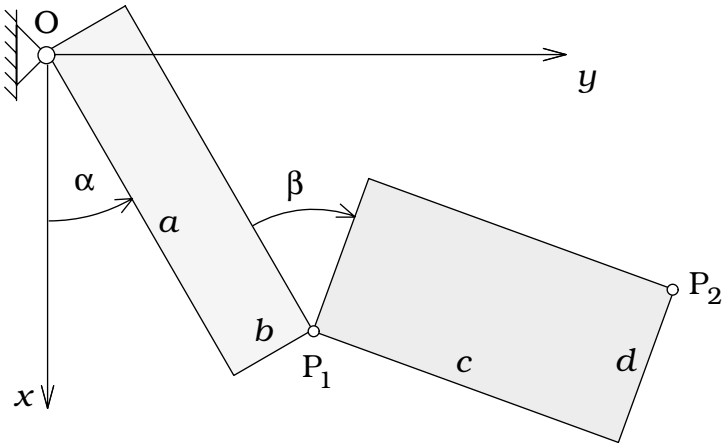
Aufgabe 3.8

In B trifft ein von A kommender Lichtstrahl auf eine verspiegelte Kreiszylinderwand und wird in Richtung C reflektiert (Einfallswinkel = Ausfallswinkel). Man berechne die Koordinate x_C.



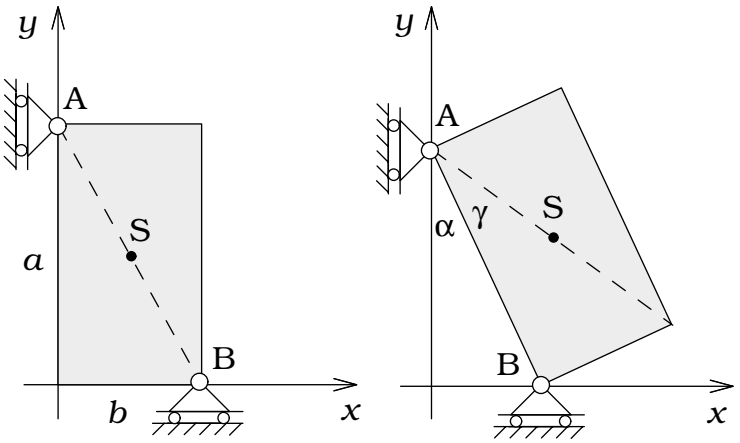
Aufgabe 3.9

Zwei starre Rechteckplatten sind gelenkig miteinander verbunden und können sich in der xy-Ebene drehen, wobei die Winkel α und β zur Beschreibung der Lage des Systems verwendet werden. Man berechne die x- und die y-Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 als Funktionen der Winkel α und β.

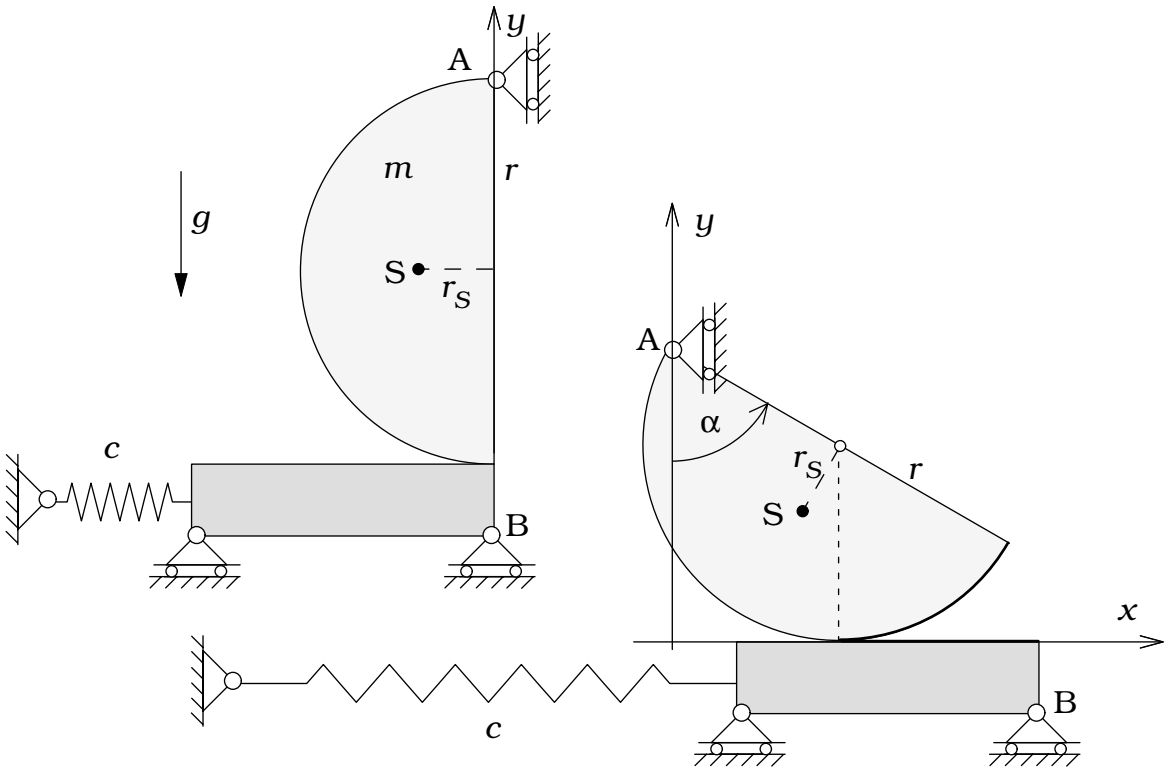


Aufgabe 3.10

Die Eckpunkte A und B einer rechteckigen Scheibe (Schwerpunkt S) können auf der y- und der x-Achse gleiten. Man berechne die Koordinaten x_B,y_A,x_S und y_S als Funktionen des Winkels α, sowie die Bahnkurve von S.

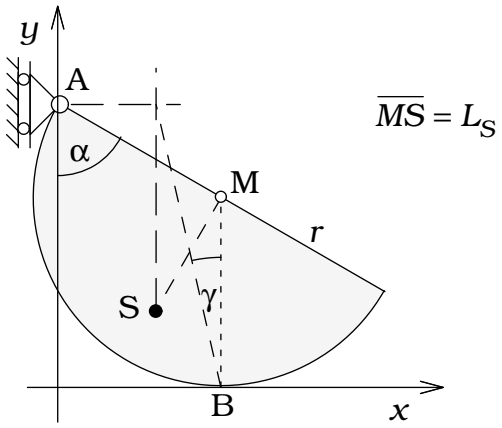


Aufgabe 3.11



Man berechne die Koordinaten x_S, y_S und x_B, wenn die Halbkreisscheibe auf dem Wagen rollt.

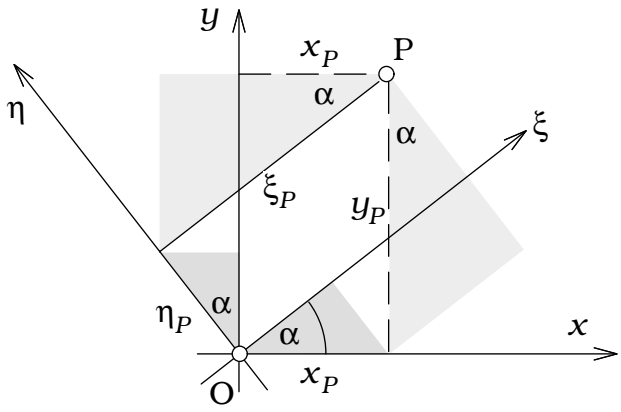
Aufgabe 3.12



Man berechne den Winkel γ als Funktion des Winkels α.

Aufgabe 3.13

Man berechne die Beziehung zwischen den Koordinaten des Punktes P in den beiden Bezugssystemen.

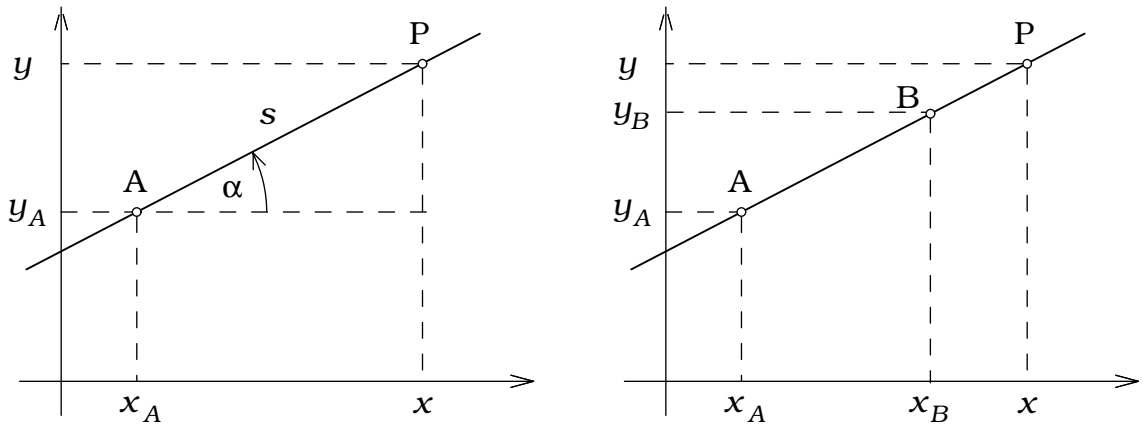


Aufgabe 3.14

Eine geschwindigkeitsproportional schwach gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch das Gesetz

$$y(\tau) = Ae^{-D\tau}\sin(\sqrt{1-D^2}\,\tau), \qquad 0 < D < 1, \qquad \tau := \omega_0 t.$$

Die Konstante D ist das LEHRsche Dämpfungsmaß.
Man stelle diese Funktion für $D = 0.1$ graphisch dar und formuliere die Funktion $y(t)$ in komplexer Schreibweise.



Eine Gerade in der xy-Ebene ist definiert
entweder

durch einen Punkt A und den Winkel α mit der x-Achse,

oder

durch zwei Punkte A und B.

Im ersten Fall hat ein beliebiger Punkt P auf der Geraden die Koordinaten

$$x = x_A + s\cos\alpha, \qquad y = y_A + s\sin\alpha.$$

Das ist die **Parameterdarstellung der Geraden**. Wenn wir den Abstand s der Punkte P und A eliminieren, erhalten wir die **Geradengleichung**

$$y = y_A + \tan\alpha\,(x - x_A);$$

$\tan\alpha$ ist die **Steigung der Geraden.**

Im zweiten Fall wird

$$\tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

und damit lautet die Geradengleichung

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A).$$

Für **Geraden durch den Ursprung** des Koordinatensystems wählen wir

$$x_A = y_A = 0.$$

Damit ergeben sich die Darstellungen

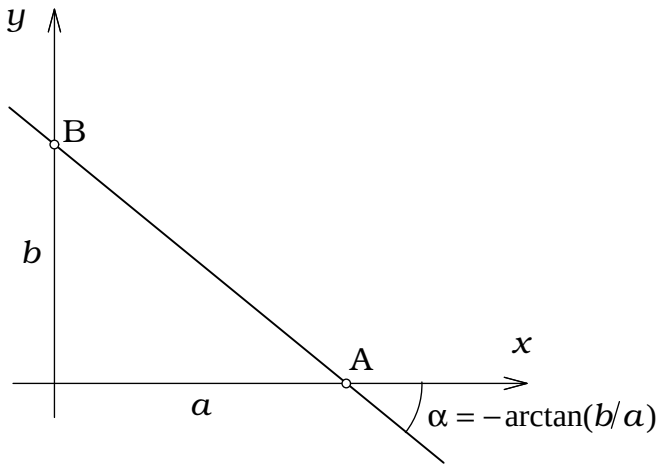
$$x = s\cos\alpha, \qquad y = s\sin\alpha;$$

$$y = \tan\alpha\; x,$$

$$y = \frac{y_B}{x_B}\, x.$$

Für die Gerade, die durch den Punkt A:$(a,0)$ auf der x-Achse und den Punkt B:$(0,b)$ auf der y-Achse geht, wird

$$y = -\frac{b}{a}(x - a).$$



Daraus ergibt sich die **Abschnittsform der Geradengleichung**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die durch die Gleichung

$$p\,x + q\,y = r \qquad \rightarrow \qquad \frac{x}{r/p} + \frac{y}{r/q} = 1$$

beschriebene Gerade hat die Achsenabschnitte

$$a = \frac{r}{p}, \quad b = \frac{r}{q}.$$

Mit dieser Information läßt sich die Gerade leicht graphisch darstellen.

▼ Beispiele:

Die Berechnung des Schnittpunktes P zweier Geraden

$$G_1: \begin{cases} x = x_A + s_1 \cos\alpha, \\ y = y_A + s_1 \sin\alpha, \end{cases} \qquad G_2: \begin{cases} x = x_B + s_2 \cos\beta, \\ y = y_B + s_2 \sin\beta, \end{cases}$$

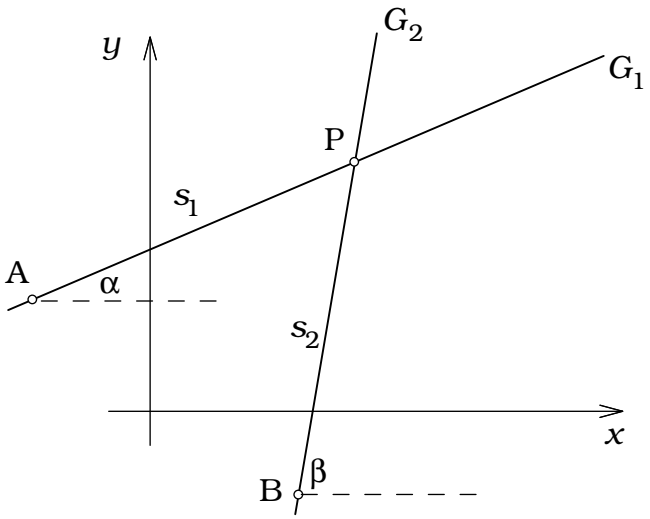
führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_A + s_1\cos\alpha &= x_B + s_2\cos\beta \\ y_A + s_1\sin\alpha &= y_B + s_2\sin\beta \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} s_1\cos\alpha - s_2\cos\beta &= x_B - x_A \\ s_1\sin\alpha - s_2\sin\beta &= y_B - y_A \end{aligned}$$

für die Abstände des Schnittpunktes P von den Geradenpunkten A und B:

$$s_1 = \frac{(x_B - x_A)\sin\beta - (y_B - y_A)\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$s_2 = \frac{(x_B - x_A)\sin\alpha - (y_B - y_A)\cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$



Wenn $A \neq B$ und $\alpha \neq \beta$ ist, gibt es immer einen Schnittpunkt mit endlichen Entfernungen von A und B.

Wenn $A = B$ und $\alpha \neq \beta$ ist, wird $s_1 = s_2 = 0$.

Wenn $A \neq B$ und $\alpha = \beta$ ist, sind die Geraden parallel und es gibt keinen Schnittpunkt in endlicher Entfernung von A und B.

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

läßt sich immer deuten als Schnittpunktbestimmung der Geraden

$$y = \underbrace{-\frac{a_{11}}{a_{12}}}_{\tan\alpha}x + \frac{b_1}{a_{12}}, \qquad y = \underbrace{-\frac{a_{21}}{a_{22}}}_{\tan\beta}x + \frac{b_2}{a_{22}}.$$

Es gibt keinen Schnittpunkt, wenn die Geraden parallel sind:

$$\alpha = \beta \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = \tan\beta \quad \rightarrow \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad \rightarrow \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Wenn die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

die Gleichung

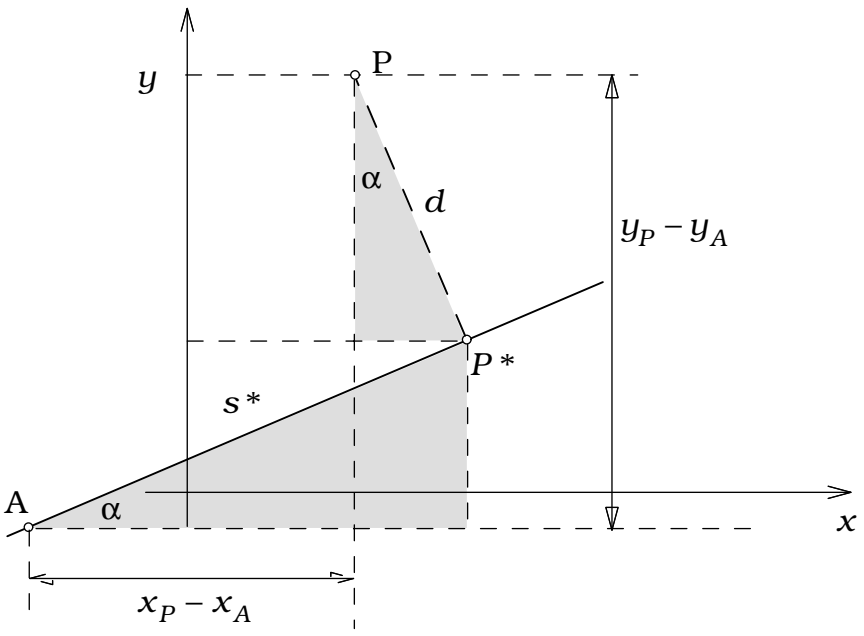
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

erfüllen, existiert keine Lösung.
Der aus den Koeffizienten des Gleichungssystems gebildete Ausdruck ist die **Determinante** der Koeffizientenmatrix:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

▲

▼



Für den senkrechten Abstand d eines Punktes P:(x_P, y_P) von der Geraden G durch den Punkt A sowie den Abstand s^* des Lot-Fußpunktes P* vom Punkt A erhalten wir das Gleichungssystem:

$$s^* \cos\alpha - d \sin\alpha = x_P - x_A,$$
$$s^* \sin\alpha + d \cos\alpha = y_P - y_A.$$

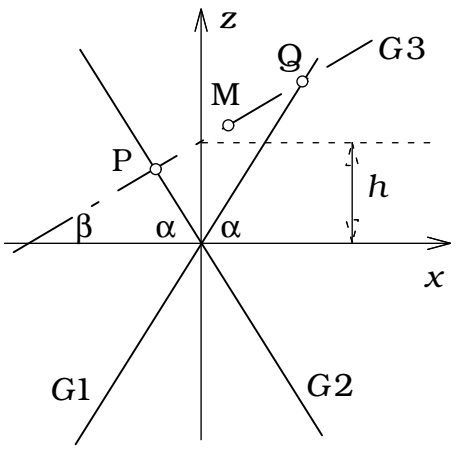
Daraus folgt

$$d = (y_P - y_A)\cos\alpha - (x_P - x_A)\sin\alpha,$$
$$s^* = (y_P - y_A)\sin\alpha + (x_P - x_A)\cos\alpha.$$

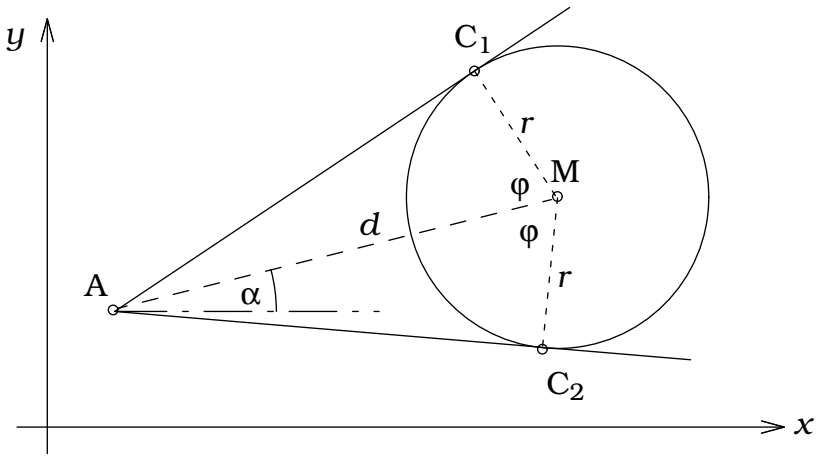
▲

Aufgabe 4.1

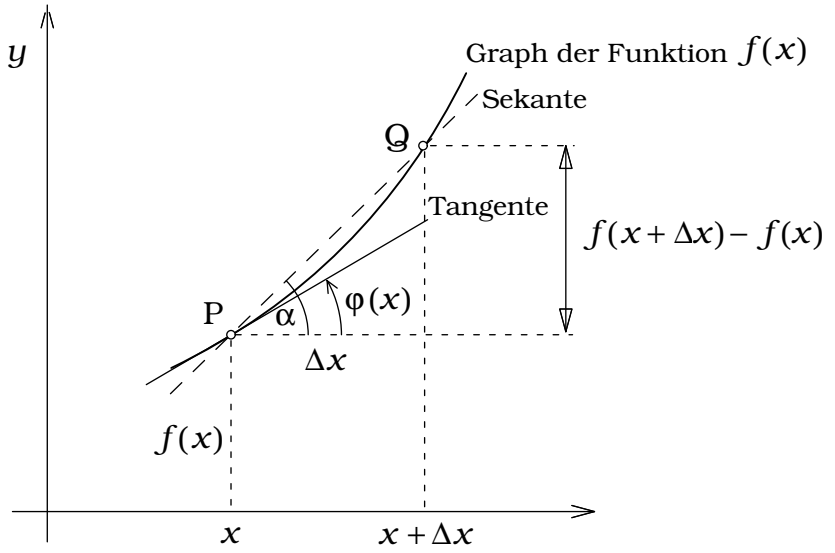
Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Geraden *G*3 mit den Geraden *G*1 und *G*2 in der *xz*-Ebene, sowie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke PQ und deren Länge.



Aufgabe 4.2



Für den Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt M: (x_M, y_M) berechne man die Koordinaten der Berührungspunkte C_1 und C_2 der Tangenten durch den Punkt A: (x_A, y_A).



Der Quotient

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =: \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan\alpha.$$

wird **Differenzenquotient** genannt. Er liefert den Tangens des Neigungswinkels α der Sekante durch die Kurvenpunkte P und Q.

Mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ nähert sich der Punkt Q dem Punkt P, und aus der Sekante wird die Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt P mit dem Neigungswinkel $\varphi(x)$. Man bezeichnet den Grenzwert als **Ableitung** oder **Differentialquotient** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x und erhält

$$f'(x) := \frac{df(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \tan\varphi(x).$$

(Man spricht: „f-Strich“ oder „d-f-nach-dx“).

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x gibt also Auskunft über die durch $\tan\varphi(x)$ beschriebene **Steigung** der Funktion $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

▼ Beispiele:

Für die Potenzfunktion

$$f(x) = x^n, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

erhalten wir

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \text{Terme mit höh. Pot. von } \Delta x$$

und deshalb wird

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

▲

▼

Für die Exponentialfunktion

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} + \ldots$$

gilt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\lambda \Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{\lambda + \frac{\lambda^2 \Delta x}{2!} + \frac{\lambda^3 (\Delta x)^2}{3!} + \ldots\} = \lambda,$$

und somit

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\lambda(x+\Delta x)} - e^{\lambda x}}{\Delta x} = e^{\lambda x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\lambda \Delta x} - 1}{\Delta x},$$

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lambda e^{\lambda x}.$$

▲

Häufig werden die folgenden **Differentiationsregeln** gebraucht, die sich aus den entsprechenden Differenzenquotienten mit dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergeben:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \to \quad f'(x) = g'(x) + h'(x),$$
$$f(x) = a\, g(x) \quad \to \quad f'(x) = a\, g'(x),$$

Produktregel:

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \to \quad f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x),$$

Quotientenregel:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \to \quad f'(x) = \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \to \quad f'(x) = \frac{dg(h)}{dh}\frac{dh}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} h'(x).$$

▼ Beispiele:

Bestimmung der Ableitungen der Winkelfunktionen:

$$\frac{de^{i\lambda x}}{dx} = \frac{d}{dx}\{\cos(\lambda x) + i\sin(\lambda x)\} = \frac{d\cos(\lambda x)}{dx} + i\frac{d\sin(\lambda x)}{dx},$$

$$\frac{de^{i\lambda x}}{dx} = i\lambda e^{i\lambda x} = i\lambda\{\cos(\lambda x) + i\sin(\lambda x)\} = -\lambda\sin(\lambda x) + i\lambda\cos(\lambda x),$$

$$\frac{d\cos(\lambda x)}{dx} = -\lambda\sin(\lambda x), \qquad \frac{d\sin(\lambda x)}{dx} = \lambda\cos(\lambda x).$$

▲

▼

Bestimmung der Ableitungen der Hyperbelfunktionen:

$$\frac{d\cosh(\lambda x)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})}{dx} = \frac{\lambda}{2}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) = \lambda\sinh(\lambda x),$$

$$\frac{d\sinh(\lambda x)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{dx} = \frac{\lambda}{2}(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}) = \lambda\cosh(\lambda x).$$

▲

▼

Anwendung der Produktregel:

$$f(x) = x^2\sin(\lambda x),$$

$$f'(x) = 2x\sin(\lambda x) + x^2\lambda\cos(\lambda x).$$

▲

▼

Anwendung der Produktregel:

$$f(x) = Ae^{\lambda x}\sin(\mu x),$$

$$f'(x) = Ae^{\lambda x}(\lambda\sin(\mu x) + \mu\cos(\mu x)).$$

▲

▼

Anwendung der Qotientenregel:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

▲

▼

Anwendung der Qotientenregel:

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

▲

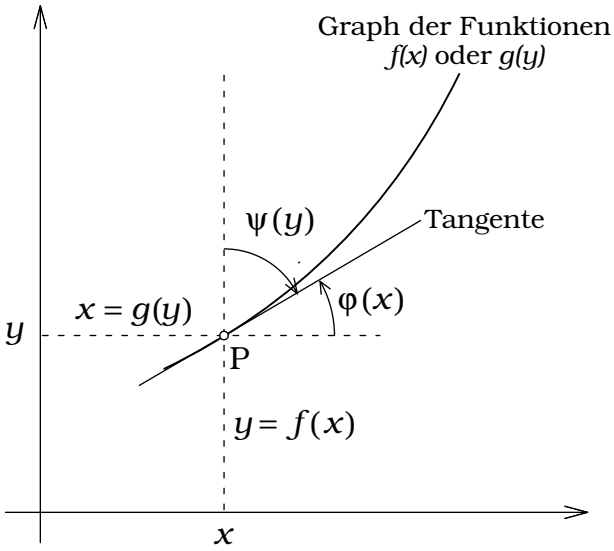
▼

Anwendung der Kettenregel:

$$g(h) = h^3, \qquad h(x) = (1 + x^3) \quad \rightarrow \quad f(x) = g(h(x)) = (1 + x^3)^3;$$

$$f'(x) = 3(1 + x^3)^2 3x^2 = 9x^2(1 + x^3)^2.$$

▲



$$\tan\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin(\pi/2 - \varphi)}{\cos(\pi/2 - \varphi)} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi}.$$

Ist $x = g(y)$ die Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x)$, so gilt für die beiden Neigungswinkel der lokalen Tangente bezogen auf die x- und die y-Achse

$$\tan\psi(y) = \frac{1}{\left(\tan\varphi(x)\right)_{x=g(y)}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=g(y)}}.$$

▼ Beispiele:

$$y = \sin x \quad \leftrightarrow \quad x = \arcsin y$$

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \sin x}{dx}\right)_{x=\arcsin y}}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\sin^2 x}\right)_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

▲

▼

$$y = \tan x \quad \leftrightarrow \quad x = \arctan y$$

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \tan x}{dx}\right)_{x=\arctan y}}$$

$$= \left(\cos^2 x\right)_{x=\arctan y} = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}\right)_{x=\arctan y} = \left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)_{x=\arctan y} = \frac{1}{1+y^2}.$$

▲

▼

$$y = \ln x \qquad \leftrightarrow \qquad x = e^y$$

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{de^y}{dy}\right)_{y=\ln x}} = \frac{1}{\left(e^y\right)_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

▲

▼

Die Funktion

$$y(x) = \{f(x)\}^k, \qquad f(x) > 0, \qquad k\text{: reelle Zahl}$$

kann mit der Substitution

$$u = f(x)$$

vorübergehend geschrieben werden

$$y = u^k = \{e^{\ln u}\}^k = e^{k \ln u}.$$

Nach der Kettenregel wird dann

$$y' = \frac{dy}{du}u' = e^{k \ln u} k \frac{d \ln u}{du} u' = k e^{k \ln u} \frac{u'}{u} = k u^k \frac{u'}{u} = k u^{k-1} u',$$

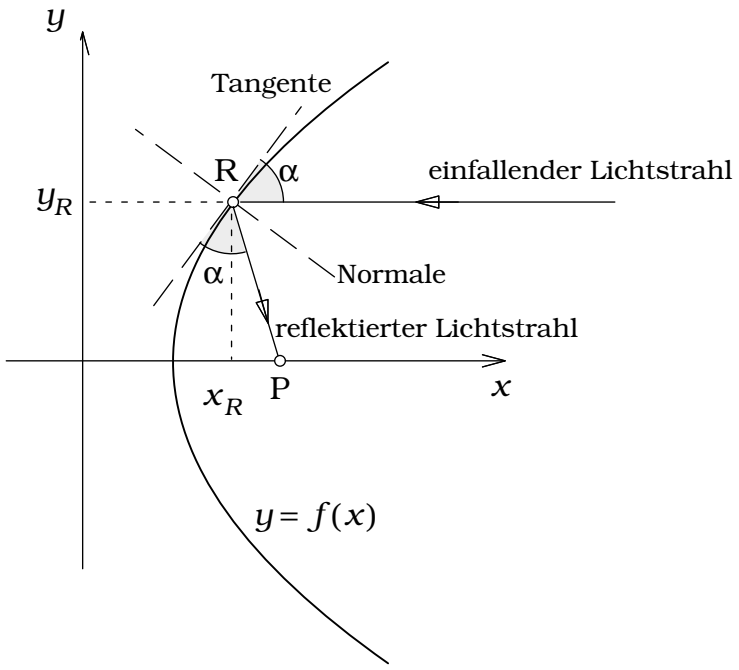
also in der ursprünglichen Scheibweise

$$y' = k\{f(x)\}^{k-1} f'(x).$$

▲

▼

Auf eine verspiegelte Zylinderfläche, die in der xy-Ebene durch die Kurve $y = f(x)$ beschrieben wird, trifft im Punkt R ein parallel zur x-Achse einfallender Lichtstrahl.



Er wird dort nach dem Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert und trifft im Punkt P auf die x-Achse. Man berechne die Koordinate von P für den Fall, daß die Erzeugende der Zylinderfläche die Parabel

$$y = \sqrt{2bx - b^2}$$

ist.

Einfalls- und Ausfallswinkel werden auf die lokale Tangente im Punkt R bezogen, deshalb ist

$$\tan\alpha = f'(x_R).$$

Die Gerade durch P und R hat den Neigungswinkel 2α, also gilt für die Punkte auf der Geraden

$$y = y_R + \tan(2\alpha)(x - x_R)$$

und insbesondere für den Punkt P

$$0 = y_R + \tan(2\alpha)(x_P - x_R).$$

Daraus folgt

$$x_P = x_R - \frac{y_R}{\tan(2\alpha)}$$

mit

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2f'(x_R)}{1-(f'(x_R))^2}.$$

Nun ist aber

$$f'(x) = \frac{b}{\sqrt{2bx - b^2}} = \frac{b}{f(x)} \qquad \rightarrow \qquad f'(x_R) = \frac{b}{y_R},$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2by_R}{y_R{}^2 - b^2} = \frac{by_R}{bx_R - b^2},$$

und deshalb wird

$$x_P = x_R - \frac{y_R}{\tan(2\alpha)} = x_R - \frac{bx_R - b^2}{b} = b.$$

Weil dieses Ergebnis unabhängig ist von der Koordinate x_R des Reflexionspunktes R, werden alle parallel zur x-Achse einfallenden Lichtstrahlen in den gleichen Punkt P auf der x-Achse reflektiert, der deshalb „Brennpunkt“ heißt und bei der Parabel

$$y = \sqrt{2bx - b^2}$$

den Abstand b vom Koordinatenursprung hat (→ Geometrische Grundlagen).

▲

▼

Auf dem Parabelabschnitt

$$y = \sqrt{2bx - b^2} = (2bx - b^2)^{1/2}, \qquad (x > b/2, \quad y > 0)$$

gilt für die Steigung

$$y' = \frac{1}{2}(2bx - b^2)^{-1/2}2b = \frac{b}{\sqrt{2bx - b^2}},$$

also

$$y' = b/y$$

Die entsprechende Gleichung

$$yy' = b$$

kann als **Differentialgleichung** für eine Funktion $y(x)$ aufgefaßt werden.
Wegen

$$yy' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right)$$

können wir die Differentialgleichung auch schreiben

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right) = b\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2}y^2 = bx + C$$

mit einer beliebigen Konstanten C, also

$$y(x) = \sqrt{2(bx + C)}$$

Das ist die **allgemeine Lösung der Differentialgleichung** $yy' = b$.

▲

▼

Die **homogene Differentialgleichung erster Ordnung**

$$y' - \lambda y = 0$$

in der Darstellung

$$\frac{y'}{y} = \lambda \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dx}(\ln y) = \lambda$$

wird durch

$$\ln y = \lambda x + C$$

erfüllt, wobei C eine beliebige Konstante ist. Daraus folgt

$$y = e^{(\lambda x + C)} = e^C e^{\lambda x}.$$

Wir setzen

$$A := e^C$$

und erhalten

$$y = Ae^{\lambda x}$$

als **allgemeine Lösung der Differentialgleichung** $y' - \lambda y = 0$.

▲

Als **zweite Ableitung** einer Funktion $f(x)$ ist definiert

$$f''(x) := \frac{df'(x)}{dx} := \frac{d^2 f(x)}{dx^2} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

(Man spricht: „f-zwei-Strich“ oder „d-zwei-f-nach-dx-Quadrat“).

Die höheren Ableitungen werden entsprechend definiert, beispielsweise die **dritte Ableitung** der Funktion $f(x)$

$$f'''(x) := \frac{d^3 f(x)}{dx^3} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x}.$$

Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist ein Maß für die Änderung der Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x. Für den Differentialquotienten des Neigungswinkels $\varphi(x) = \arctan(f'(x))$ der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ erhalten wir nach der Kettenregel, wenn wir vorübergehend

$$u(x) := f'(x)$$

setzen,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d \arctan u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx},$$

also

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}.$$

Gehen wir von der Stelle x zur infinitesimal benachbarten Stelle $(x+dx)$, so ändert sich der Neigungswinkel der Tangente um

$$d\varphi = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}dx.$$

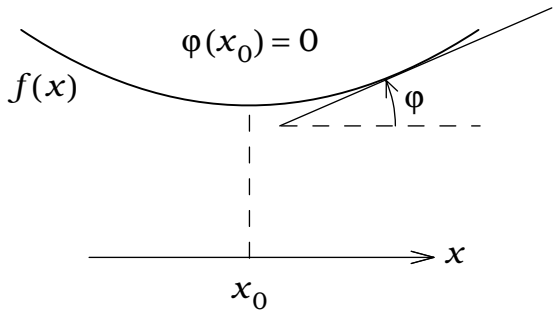
Ist insbesondere $f'(x_o) = 0$, so wird in x_o

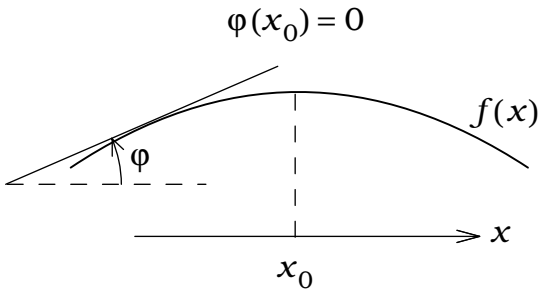
$$d\varphi = f''(x_o)dx.$$

Der auf die x-Achse bezogene Neigungswinkel φ der Tangente nimmt also zu, wenn $f''(x_0) > 0$ ist und er nimmt ab, wenn $f''(x_0) < 0$ ist. Daraus folgt:

Wenn $\begin{cases} f''(x_o) < 0 \\ f''(x_o) > 0 \end{cases}$ ist, hat die Funktion $f(x)$ in x_o ein **lokales** $\begin{cases} \textbf{Maximum} \\ \textbf{Minimum} \end{cases}$.

Wenn $f''(x_o) = 0$ ist, hat der Graph der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_o einen **Wendepunkt**.





$f'(x_0) = 0,$
$f''(x_0) > 0;$

$f'(x_0) = 0,$
$f''(x_0) < 0.$

▼ Beispiele:

Ist

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3,$$

so wird

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1, \qquad f''(x) = 6x - 6.$$

Aus

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 - 2/\sqrt{3} = -0{,}1547 \\ x_2 = 1 + 2/\sqrt{3} = 2{,}1547 \end{cases}$$

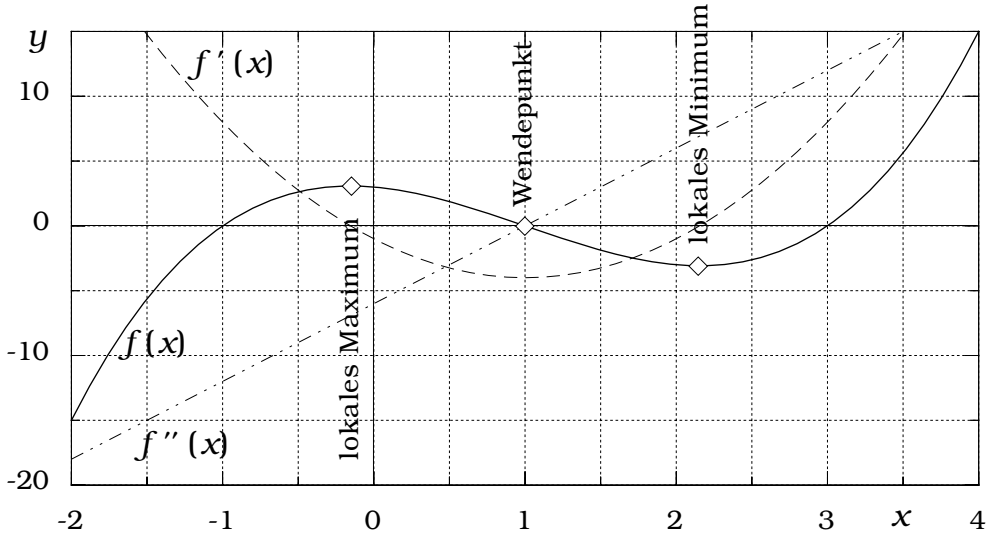
folgt

$f''(x_1) = -6{,}9282 \qquad f(x_1) = 3{,}0792 \qquad$ lokales Maximum

$f''(x_2) = 6{,}9282 \qquad f(x_2) = -3{,}0792 \qquad$ lokales Minimum

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_3 = 1 \quad \rightarrow \quad f'(x_3) = -4$$

$f(x_3) = 0 \qquad$ Wendepunkt



▲

▼

Besonders bemerkenswert sind die Eigenschaften der zweiten Ableitungen der Sinus- und der Cosinusfunktion und der entsprechenden Hyperbelfunktionen.

Es gilt

$$(\sin(\lambda x))'' = (\lambda\cos(\lambda x))' = -\lambda^2\sin(\lambda x), \qquad (\sinh(\lambda x))'' = (\lambda\cosh(\lambda x))' = \lambda^2\sinh(\lambda x),$$
$$(\cos(\lambda x))'' = (-\lambda\sin(\lambda x))' = -\lambda^2\cos(\lambda x); \qquad (\cosh(\lambda x))'' = (\lambda\sinh(\lambda x))' = \lambda^2\cosh(\lambda x).$$

Daraus ergeben sich mit beliebigen Konstanten C_1, C_2, D_1 und D_2 die Beziehungen

$$y(x) = C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x) \quad \rightarrow \quad y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0.$$

$$v(x) = D_1\sinh(\lambda x) + D_2\cosh(\lambda x) \quad \rightarrow \quad v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0.$$

Die Gleichungen

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \qquad v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0$$

sind **homogene, lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung** für die Funktionen $y(x)$ und $v(x)$;

$$y(x) = C_1\sin(\lambda x) + C_2\cos(\lambda x), \qquad v(x) = D_1\sinh(\lambda x) + D_2\cosh(\lambda x)$$

sind ihre allgemeinen Lösungen.

Die Konstanten C_1, C_2, D_1 und D_2 können dazu verwendet werden, die Lösungen $y(x)$ und $v(x)$ beispielsweise für $x = 0$ an speziell vorgegebene Werte

$$\{y(0) = y_0,\ y'(0) = h_0\} \qquad \{v(0) = v_0,\ v'(0) = k_0\}$$

anzupassen:

$$y(0) = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1, \qquad y'(0) = C_1\lambda\cdot 1 - C_2\lambda\cdot 0,$$
$$C_2 = y_0, \qquad C_1 = -\frac{h_0}{\lambda};$$

$$v(0) = D_1\cdot 0 + D_2\cdot 1, \qquad v'(0) = D_1\lambda\cdot 1 + D_2\lambda\cdot 0,$$
$$D_2 = v_0, \qquad D_1 = \frac{k_0}{\lambda}.$$

▲

▼

Die Bewegung eines Punktes P auf einer Bahnkurve beschreibt man durch ein Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$. Dabei ist t die in Sekunden gemessene Zeit und $s(t)$ die längs der Bahnkurve beispielsweise in Metern gemessene Position des Punktes P zum Zeitpunkt t auf der Bahnkurve.

$$v_s(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

ist dann die in Meter / Sekunde gemessene **Bahngeschwindigkeit** und

$$a_s(t) = \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

die in Meter / (Sekunde)^2 gemessene **Bahnbeschleunigung** des Punktes P.

Eine Differentiation nach der Zeit t bezeichnet man häufig mit einem Punkt über dem Symbol für die zu differenzierende Funktion:

$$v_s = \dot{s}, \qquad a_s = \dot{v}_s = \ddot{s}.$$

Die Drehbewegung eines Körpers um eine Drehachse beschreibt man durch ein Drehwinkel-Zeit-Gesetz $\varphi(t)$, wobei der Drehwinkel φ im Bogenmaß gemessen wird.

$$\dot{\varphi} := \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

ist dann die **Winkelgeschwindigkeit** und

$$\ddot{\varphi} := \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

die **Winkelbeschleunigung** des Körpers.

▲

Eine Funktion $F(x)$ nennen wir **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn

$$F'(x) = f(x)$$

gilt; die Stammfunktion ist bis auf eine beliebige Konstante bestimmt.

Die in der folgenden Tabelle angegebenen Paare von Funktion und Stammfunktion werden besonders häufig gebraucht; weitere Beispiele findet man in mathematischen Formelsammlungen.

$f(x)$	$F(x)$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lambda x) + C$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C$
$\sin(\lambda x)$	$-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x) + C$
$\cos(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(\lambda x)}$	$\frac{1}{\lambda}\tan(\lambda x) + C$
$\sinh(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x) + C$
$\cosh(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}\sinh(\lambda x) + C$

▼ Beispiel:

Aus der **inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung**

$$w''(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

für die Funktion $w(x)$ folgt zunächst mit der Stammfunktion von x^n

$$w'(x) = a_2\frac{x^3}{3} + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x + C_1$$

und schließlich erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$w(x) = a_2\frac{x^4}{12} + a_1\frac{x^3}{6} + a_0\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

C_1 und C_2 sind Konstanten, mit deren Hilfe man die Funktion $w(x)$ in einer beliebigen Stelle x^* ihres Definitionsbereiches an speziell vorgegebene Werte für w und w' anpassen kann.

$w(x)$ setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$w''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad w_{\text{homogen}} = C_1x + C_2$$

und einer Partikularlösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$w''(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \rightarrow \quad w_{\text{partikular}} = a_2\frac{x^4}{12} + a_1\frac{x^3}{6} + a_0\frac{x^2}{2};$$

$$w(x) = w_{\text{homogen}} + w_{\text{partikular}}.$$

▲

Jede in der Umgebung von x_0 stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$ läßt sich in dieser Umgebung in eine **Potenzreihe** entwickeln:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ...$$

Daraus folgt

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + ...$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + 5 \cdot 4a_5(x - x_0)^3 + ...$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x - x_0)^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4a_6(x - x_0)^3 + ...$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0, \\ f'(x_0) &= a_1, \\ f''(x_0) &= 2 \cdot a_2 = 2! a_2, \\ f'''(x_0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 3! a_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir können deshalb schreiben:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

Diese für die Anwendung besonders interessante Darstellung der Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 nennt man **TAYLORreihe der Funktion *f(x)*** in x_0. Mit endlich vielen Summanden erhält man mitunter sehr nützliche Näherungsformeln für $f(x)$ in der Umgebung(!) von x_0.

▼ Beispiele:

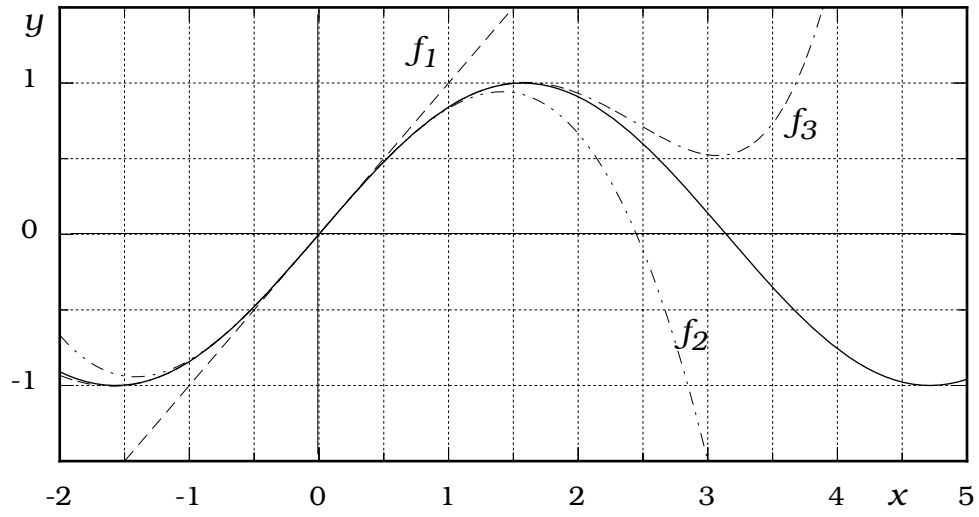
Wenn $f(x) = \sin x$ ist, wird für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \\ &f'(0) = \cos(0) = 1, \\ &f''(0) = -\sin(0) = 0, \\ &f'''(0) = -\cos(0) = -1, \\ &... \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + ...$$

Wir erhalten also die schon im Rahmen der elementaren Funktionen angegebene Reihendarstellung der Funktion $\sin x$.

Die folgende Abbildung zeigt, in welcher Güte die unterschiedlich abgebroche-

nen TAYLORreihen die Funktion $y = \sin x$ approximieren.



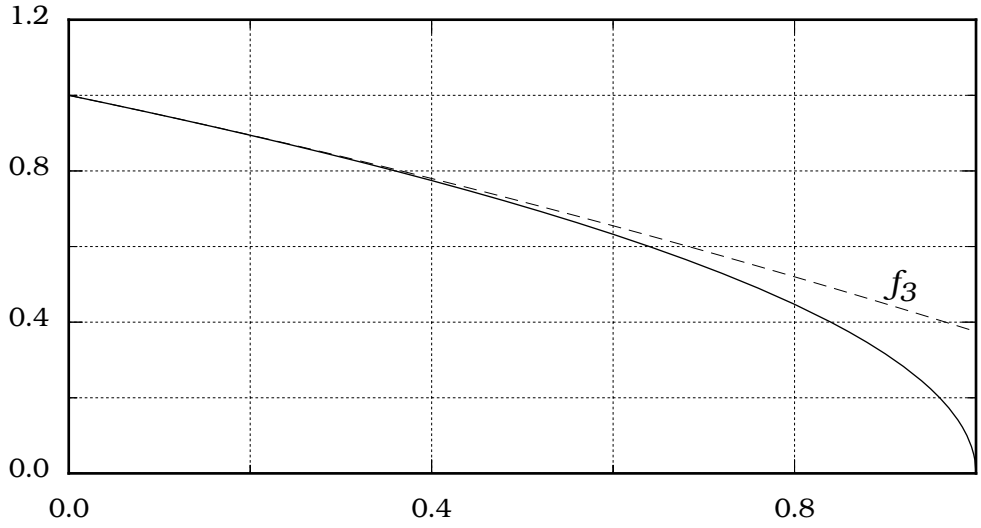
$$f_1 := x, \qquad f_2 := x - \frac{x^3}{3!}, \qquad f_3 := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

▲

▼

Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad 0 \le x < 1$$



besitzt die Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}.$$

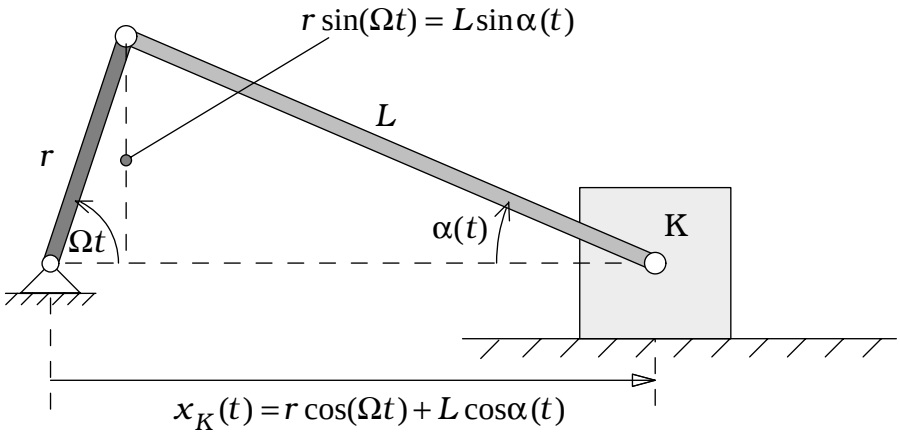
Die nach dem dritten Glied abgebrochene TAYLORreihe der Funktion $f(x)$ um $x = 0$ lautet

$$f_3(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$f_3(x)$ ist für $x << 1$ eine gute Näherung für $f(x)$, wie das obige Bild zeigt.

▲

▼



Die Kurbel (Radius r) eines Schubkurbelgetriebes dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und zwingt über die Pleuelstange (Länge L) einen Kolben auf horizontaler Führungsschiene zu einer Horizontalbewegung $x_K(t)$.

Der Systemskizze entnehmen wir

$$x_K(t) = L\{\lambda\cos(\Omega t) + \cos\alpha(t)\}, \qquad \lambda := \frac{r}{L};$$

$$\cos\alpha(t) = \sqrt{1 - \{\sin\alpha(t)\}^2} = \sqrt{1 - \{\lambda\sin(\Omega t)\}^2},$$

$$x_K(t) = L(\lambda\cos(\Omega t) + \sqrt{1 - \{\lambda\sin(\Omega t)\}^2}).$$

Wenn $\lambda^2 << 1$ ist, können wir näherungsweise den Quadratwurzelterm nach dem vorhergehenden Beispiel ersetzen durch

$$\sqrt{1 - \{\lambda\sin(\Omega t)\}^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\{\lambda\sin(\Omega t)\}^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2(\Omega t).$$

Mit

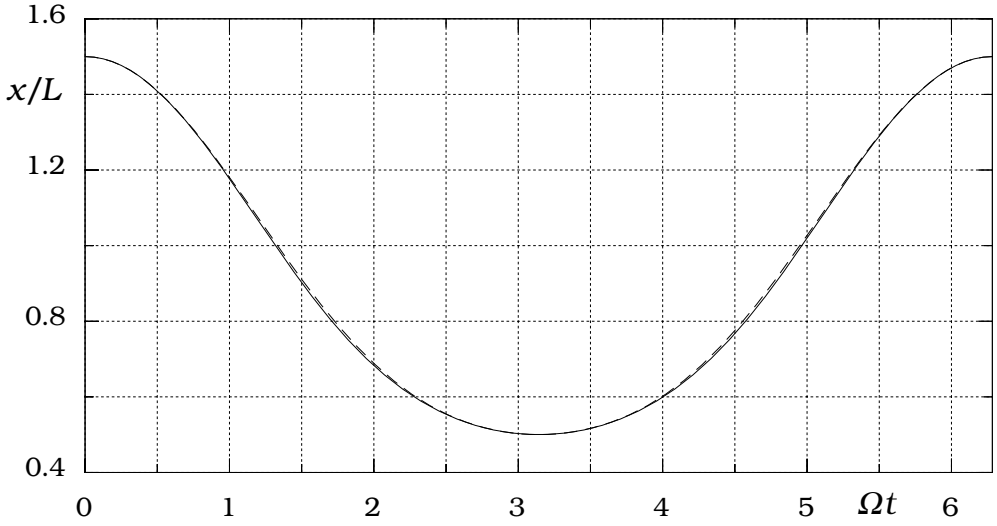
$$\sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2}\{1 - \cos(2\Omega t)\}$$

wird

$$x_K(t) \approx L\{1 - \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\cos(\Omega t) + \frac{\lambda^2}{4}\cos(2\Omega t)\}.$$

Diese Näherungsformel für das Bewegungsgesetz $x_K(t)$ ist rechentechnisch

einfacher zu handhaben als die exakte Formel, und deshalb wird sie in der Praxis häufig verwendet. In der folgenden Abbildung sind für $\lambda = 0.5$ die exakte Funktion und die Näherungsfunktion (gestrichelt) dargestellt.



Für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens erhalten wir mit dem exakten Bewegungsgesetz die relativ komplizierten Formeln

$$\dot{x}_K = L\Omega\left\{-\lambda\sin(\Omega t) - \frac{\lambda^2}{2}\frac{\sin(2\Omega t)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\Omega t)}}\right\},$$

$$\ddot{x}_K = L\Omega^2\left\{-\lambda\cos(\Omega t) - \lambda^2\frac{\cos(2\Omega t)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\Omega t)}} - \frac{\lambda^4}{4}\frac{\sin^2(2\Omega t)}{\left(\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\Omega t)}\right)^3}\right\}.$$

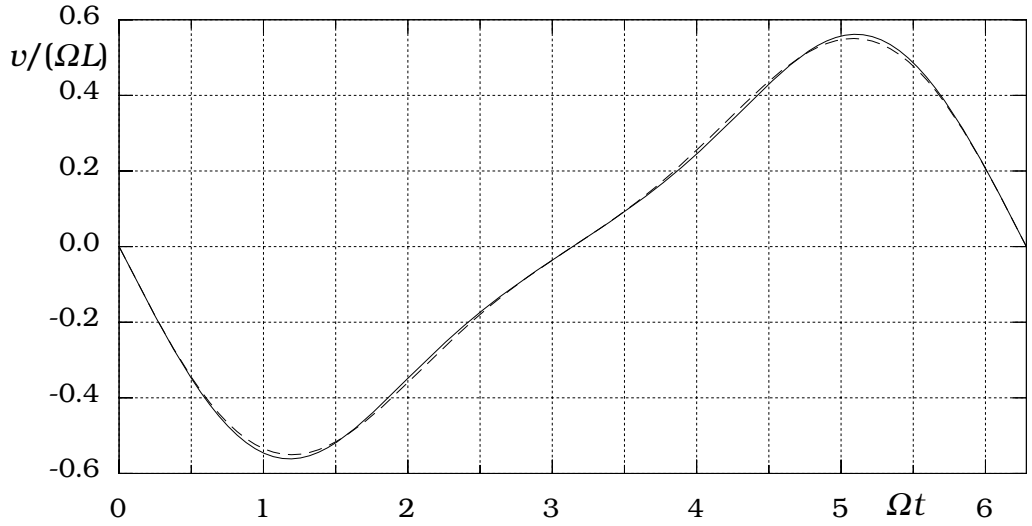
Wenn wir die Näherungsfunktion für $x_K(t)$ verwenden, wird mit viel geringerem Rechenaufwand

$$\dot{x}_K(t) \approx L\Omega\left\{-\lambda\sin(\Omega t) - \frac{\lambda^2}{2}\sin(2\Omega t)\right\},$$

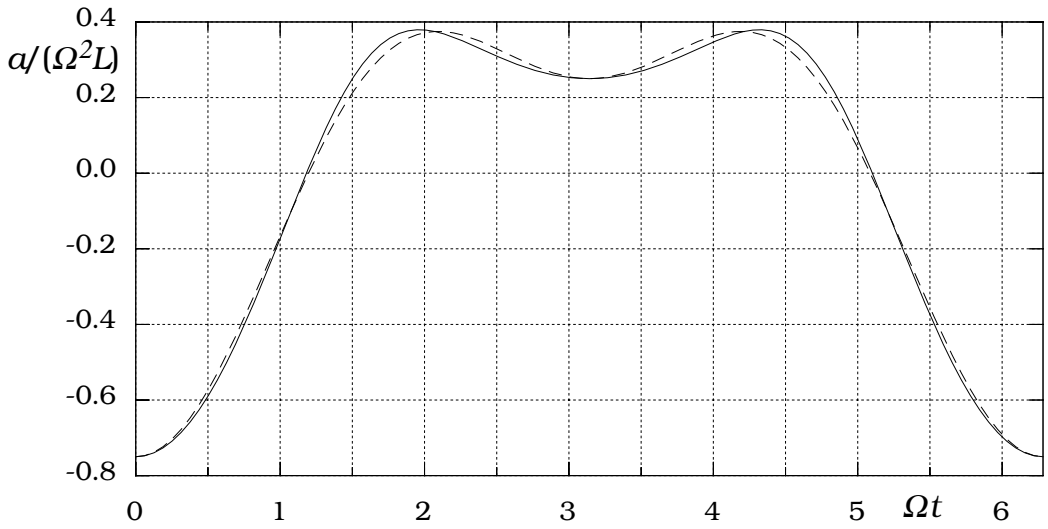
$$\ddot{x}_K(t) \approx L\Omega^2\left\{-\lambda\cos(\Omega t) - \lambda^2\cos(2\Omega t)\right\}.$$

In den folgenden Abbildungen kann man die Abweichungen für $\lambda = 0.5$ erkennen (Näherungen gestrichelt).

Geschwindigkeit $v = \dot{x}_K$ des Kolbens:



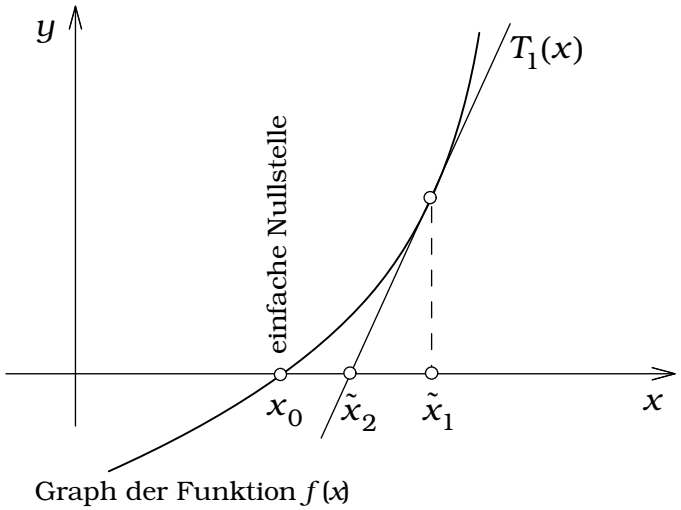
Beschleunigung $a = \ddot{x}_K$ des Kolbens:



▲

Nullstellen nichtlinearer Funktionen lassen sich meistens nur näherungsweise bestimmen. Ist $\tilde{x}_1$ der erste Näherungswert für eine einfache Nullstelle x_0 der Funktion $f(x)$, der sich beispielsweise aus einer Skizze des Funktionsgraphen gewinnen läßt, so können wir zunächst die Tangente $T_1(x)$ an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$ mit der Steigung $f'(\tilde{x}_1)$ berechnen:

$$T_1(x) := f(\tilde{x}_1) + f'(\tilde{x}_1)(x - \tilde{x}_1).$$



Die Nullstelle $\tilde{x}_2$ dieser Tangente, die sich aus der Beziehung

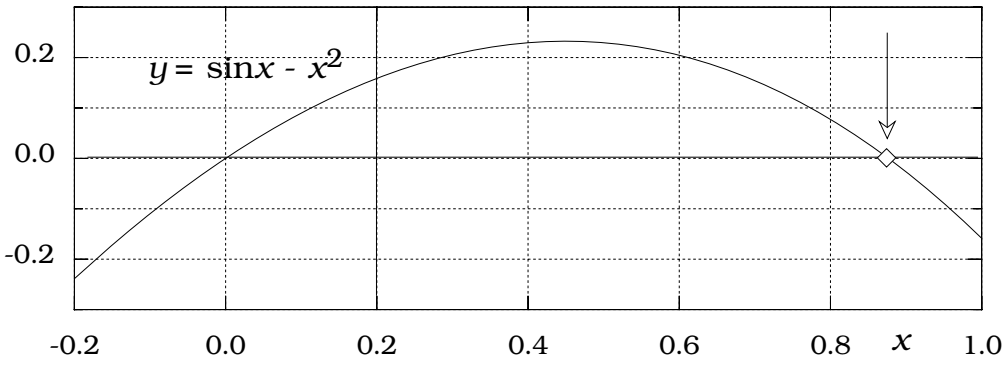
$$f(\tilde{x}_1) + f'(\tilde{x}_1)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{f(\tilde{x}_1)}{f'(\tilde{x}_1)},$$

ergibt, ist in der Regel ein besserer Näherungswert für die Nullstelle x_0 der nichtlinearen Funktion $f(x)$, wenn $\tilde{x}_1$ nahe genug bei x_0 liegt und $f'(\tilde{x}_1) \neq 0$ ist. Die Wiederholung dieser Methode liefert dann einen beliebig genauen Wert für die Nullstelle x_0; die Folge

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})}, \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

konvergiert gegen x_0. Das ist das **NEWTONsche Näherungsverfahren** zur iterativen Berechnung einer einfachen Nullstelle der nichtlinearen Funktion $f(x)$.

▼ Beispiel:



Man berechne mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens die Null-

stelle $x_0 \neq 0$ der Funktion $f(x) = \sin x - x^2$ bis auf sechs Stellen genau, ausgehend von einem Näherungswert $\tilde{x}_1$, den wir der graphischen Darstellung der Funktion entnehmen.

Als ersten Näherungswert für die Nullstelle wählen wir

$$\tilde{x}_1 = 0{,}9.$$

Der Quotient in der Iterationsvorschrift lautet

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\sin x - x^2}{\cos x - 2x},$$

also wird

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} = \tilde{x}_{n-1} - \frac{\sin(\tilde{x}_{n-1}) - \tilde{x}_{n-1}^{\,2}}{\cos(\tilde{x}_{n-1}) - 2\tilde{x}_{n-1}},$$

und daraus folgt:

$$\tilde{x}_2 = 0{,}877364803$$
$$\tilde{x}_3 = 0{,}876726722$$
$$\tilde{x}_4 = 0{,}876726215$$

Setzen wir

$$x_0 = \tilde{x}_4,$$

so wird

$$\sin x_0 - x_0^{\,2} = 4{,}0 \cdot 10^{-10}.$$

$\tilde{x}_4$ ist schon ein hinreichend genauer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle.

▲

Aufgabe 5.1

Man berechne die Geradengleichung der Tangente an die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

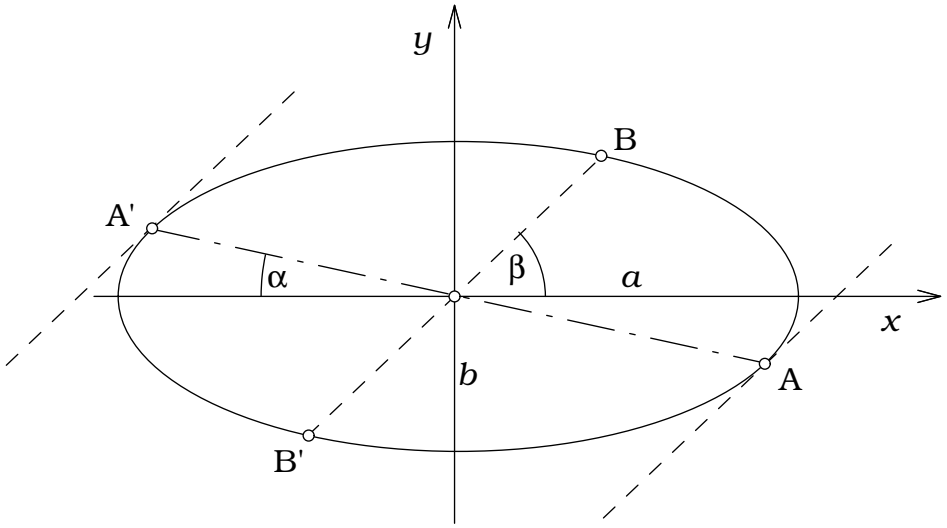
in einem Punkt A mit den Koordinaten $(x_A > 0, \quad y_A < 0)$.

Aufgabe 5.2

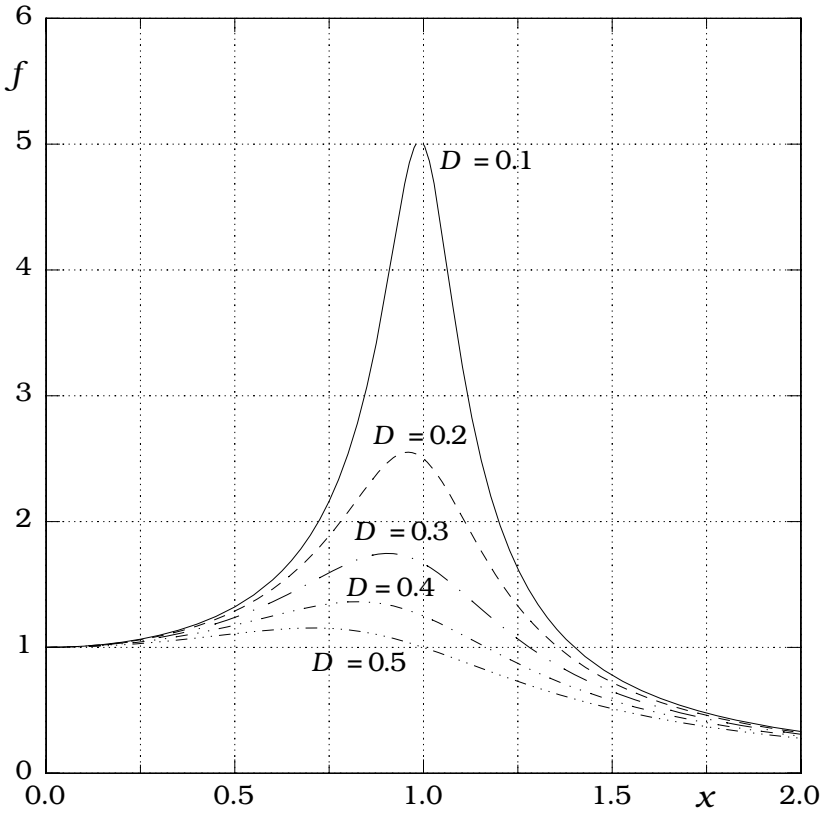
Die Strecken AA‘ und BB‘ durch den Mittelpunkt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wobei BB‘ zu den Tangenten in A und A‘ parallel ist, heißen **konjugierte Durchmesser** der Ellipse. Man berechne die Beziehung zwischen den Winkeln α und β.



Aufgabe 5.3



Im Diagramm ist die in der Schwingungslehre wichtige Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4D^2x^2}}$$

für fünf verschiedene Parameterwerte D dargestellt. Man berechne die Lage und Werte der Extremwerte.

Aufgabe 5.4

Die Flugbahn eines im Koordinatenursprung der vertikalen xy-Ebene unter dem Winkel α gegen die x-Achse mit der Geschwindigkeit v_0 abgeworfenen Balls lautet (bei Vernachlässigung der Luftreibung)

$$y(x) = \tan\alpha\, x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

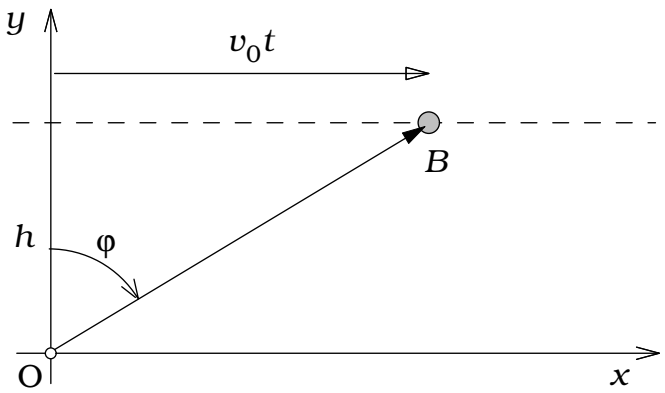
Man berechne die Wurfweite und die Wurfhöhe als Funktionen des Abwurfwinkels α.

Aufgabe 5.5

Man approximiere die Funktion $f(x) = cx^3$ in der Umgebung von $x = a$ durch ein Polynom 2. Grades.

Aufgabe 5.6

Ein Ball B bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf einer Geraden im Abstand h parallel zur x-Achse. Er soll von einem in O aufgestellten Scheinwerfer angestrahlt werden. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ muß der Scheinwerfer gedreht werden?



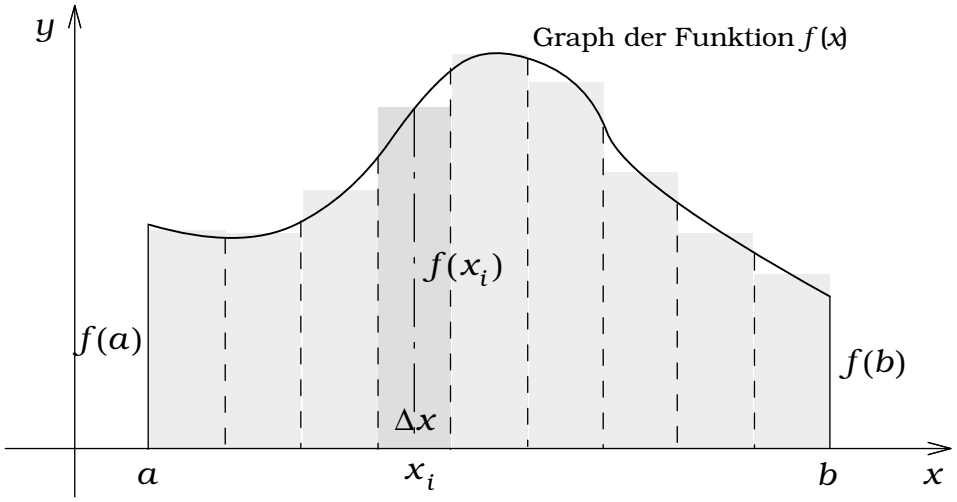
Die Fläche J zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse über dem Intervall $a \le x \le b$ läßt sich näherungsweise berechnen, wenn wir die Strecke $(b-a)$ in n Segmente der Länge

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

aufteilen, mit den Funktionswerten $f(x_i)$ in den Mittelpunkten der Segmente

$$x_i = a + (i-1)\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

die Inhalte $f(x_i)\Delta x$ der Rechteckstreifen über den Segmenten berechnen und diese addieren.



Mit steigender Segmentzahl n, also Verkleinerung der Segmente Δx, wird der Flächeninhalt immer besser angenähert, und wir schreiben:

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

Flächen oberhalb der x-Achse sind positiv, unterhalb der x-Achse negativ.

Das $\int$ – Symbol ist ein Hinweis auf diese **S**ummation von Flächenstreifen.
J ist das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$; a ist die untere und b die obere **Integrationsgrenze**, $f(x)$ der **Integrand**.

Wir nennen nun die obere Grenze $b = \tilde{x}$ und schreiben

$$J(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx.$$

Wird die obere Grenze $\tilde{x}$ um den infinitesimalen Betrag δx nach rechts verschoben, so erhalten wir

$$J(\tilde{x}+\delta x) = \int_a^{\tilde{x}} f(x)dx + f(\tilde{x}+\frac{\delta x}{2})\delta x,$$

$$J(\tilde{x}+\delta x) - J(\tilde{x}) = f(\tilde{x}+\frac{\delta x}{2})\delta x,$$

$$\frac{dJ(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{J(\tilde{x}+\delta x) - J(\tilde{x})}{\delta x} = f(\tilde{x}).$$

Wenn wir das Integral $J(\tilde{x})$ als Funktion der oberen Grenze $\tilde{x}$ interpretieren, ist die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze gleich dem Wert $f(\tilde{x})$ des Integranden. Somit ist $J(\tilde{x})$ definitionsgemäß die Stammfunktion $F(\tilde{x})$ des Integranden $f(\tilde{x})$.

Damit $J(a) = 0$ wird, müssen wir schreiben:

$$\int_a^{\tilde{x}} f(x)dx = F(\tilde{x}) - F(a).$$

▼ Beispiele:

Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $a \le x \le b$ ist

$$\int_a^b x^2 dx = (\frac{1}{3}x^3 + C)\Big|_{x=b} - (\frac{1}{3}x^3 + C)\Big|_{x=a} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

▲

▼

Die Fläche unter der Sinusfunktion zwischen 0 und π hat die Größe

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos x + C)\big|_{x=\pi} - (-\cos x + C)\big|_{x=0} = 2.$$

▲

Aus den beiden Beispielen kann man erkennen, daß die Konstante C in der Stammfunktion bei der Berechnung des bestimmten Integrals weggelassen werden kann, denn sie hebt sich bei der Differenzbildung der Funktionswerte

an den Integrationsgrenzen heraus.

Die Stammfunktion $F(x)$ zur Funktion $f(x)$ schreibt man als **unbestimmtes Integral** von $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x)dx + C \qquad \leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x).$$

Die Integration ist also die Umkehrung der Differentiation:

$$\int h'(x)\,dx = h(x) + C.$$

Daraus folgt

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 dx = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C,$$

und

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{d}{dx}\ln(f(x))dx = \ln(f(x)) + C.$$

▼ Beispiel:

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}\{\sin x\}^2 dx = \frac{1}{2}\{\sin x\}^2 + C.$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d}{dx}\ln(\cos x)dx = -\ln(\cos x) + C.$$

$$\int \frac{b}{a+bx}dx = \int \frac{d}{dx}\ln(a+bx)dx = \ln(a+bx) + C.$$

▲

Aus der Kettenregel

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

folgt

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + C.$$

Diese Formel der **partielle**n **Integration** ist mitunter hilfreich bei der Lösung von Integrationsaufgaben.

▼ Beispiele:

Um das bestimmte Integral

$$J(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} x\cos x\,dx$$

zu berechnen, setzen wir

$$g(x)=x,\quad f'(x)=\cos x,\quad \rightarrow\quad g'(x)=1,\quad f(x)=\sin x$$

und erhalten

$$\int_0^{\tilde{x}} x\cos x dx = x\sin x\,|_0^{\tilde{x}} - \int_0^{\tilde{x}} \sin x\,dx,$$

$$\int_0^{\tilde{x}} x\cos x\,dx = \tilde{x}\sin\tilde{x}+\cos\tilde{x}-1.$$

▲

▼

Für die Berechnung des Integrals

$$J_n := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx \qquad n=1,2,..., \qquad \lambda>0,$$

setzen wir

$$g(x)=x^n, \qquad f'(x)=e^{-\lambda x}, \qquad \rightarrow \qquad g'(x)=nx^{n-1}, \qquad f(x)=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Damit wird

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda}x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{n}{\lambda}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}dx,$$

also

$$J_n = \frac{n}{\lambda}J_{n-1}.$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt mit

$$J_0 := \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

$$J_1=\frac{1}{\lambda^2}, \qquad J_2=\frac{2\cdot 1}{\lambda^3}, \qquad J_3=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{\lambda^4}, \quad ... \quad J_n=\frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

▲

Das Integral

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

erhält bei einer **Variablentransformation** $x \rightarrow t$, wobei

$$x=h(t), \qquad x_1=h(t_1), \quad x_2=h(t_2)$$

gelten soll, wegen

$$dx = h'(t)dt$$

die Darstellung

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(h(t))h'(t)dt.$$

Eine solche Variablentransformation ist sinnvoll, wenn sich das Integral mit dem neuen Integranden leichter berechnen läßt.

▼ Beispiele:

Das bestimmte Integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (a+bx)^n dx$$

wird mit

$$t = a + bx \qquad \rightarrow \qquad dt = bdx \qquad \rightarrow \qquad dx = \frac{dt}{b}$$

und

$$t_1 = a + bx_1, \qquad t_2 = a + bx_2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (a+bx)^n dx = \frac{1}{b}\int_{t_1}^{t_2} t^n dt = \frac{1}{(n+1)b}(t_2{}^{(n+1)} - t_1{}^{(n+1)}).$$

▲

▼

Das bestimmte Integral

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x} dx$$

wird mit

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos(2\frac{x}{2})} = \frac{1}{1+\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$$

und

$$t = \frac{x}{2} \qquad \rightarrow \qquad dt = \frac{dx}{2} \qquad \rightarrow \qquad dx = 2dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t \,|_0^{\pi/4} = 1.$$

Für das unbestimmte Integral gilt dann

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \tan(\frac{x}{2}) + C.$$

▲

▼

Das bestimmte Integral

$$J = \int_0^T \sin(2\pi k \frac{t}{T})\cos(2\pi m \frac{t}{T})dt,$$

wobei k und m ganze Zahlen sind, lautet mit

$$\tau = \frac{2\pi}{T}t \qquad \rightarrow \qquad d\tau = \frac{2\pi}{T}dt$$

$$J = \frac{T}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(k\tau)\cos(m\tau)d\tau.$$

Weil

$$\sin(k\tau)\cos(m\tau) = \frac{1}{2}\{\sin((k-m)\tau) + \sin((k+m)\tau)\}$$

ist, wird:

$$J = \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((k-m)\tau)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((k+m)\tau)d\tau\right\}.$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\tau)d\tau = -\frac{1}{n}\cos(n\tau)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

für $n \neq 0$ und $\sin(0) = 0$ wird schließlich für beliebige ganze Zahlen k und m

$$J = \int_0^T \sin(2\pi k \frac{t}{T})\cos(2\pi m \frac{t}{T})dt = 0.$$

Entsprechend erhalten wir mit den trigonometrischen Formeln

$$\sin(k\tau)\sin(m\tau) = \frac{1}{2}\{\cos((k-m)\tau) - \cos((k+m)\tau)\},$$

$$\cos(k\tau)\cos(m\tau) = \frac{1}{2}\{\cos((k-m)\tau) + \cos((k+m)\tau)\},$$

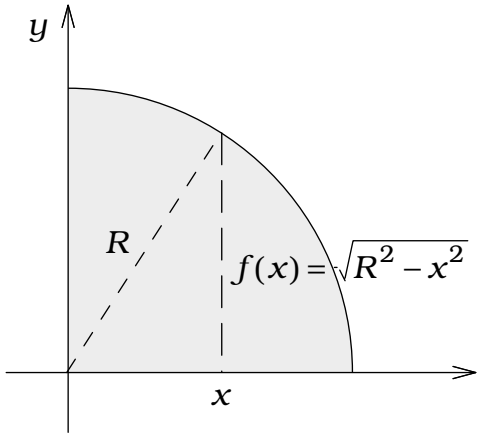
die folgenden Ergebnisse:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^T \sin(2\pi k\frac{t}{T})\sin(2\pi m\frac{t}{T})dt \\ \int_0^T \cos(2\pi k\frac{t}{T})\cos(2\pi m\frac{t}{T})dt\end{array}\right\} = \begin{cases}\frac{T}{2} & \text{wenn } k = m \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } k \neq m \text{ ist.}\end{cases}$$

▲

▼

Der Flächeninhalt A einer Viertelkreisfläche



ist durch das Integral

$$A = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

bestimmt. Wir setzen

$$x = R\sin t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dx}{dt}dt = R\cos t\,dt, \qquad \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos t,$$

$$A = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Additionstheorem: $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$

Satz von Pythagoras: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$$

$$A = \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos(2t))dt = \frac{R^2}{2}\{t + \frac{1}{2}\sin(2t)\}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

▲

Aufgabe 6.1

Man berechne den Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Aufgabe 6.2

Man berechne das (in der Schwingungslehre benötigte) Integral

$$J(t):=\int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\omega(t-\tau))d\tau.$$

Aufgabe 6.3

Man berechne das (in der Schwingungslehre benötigte) Integral

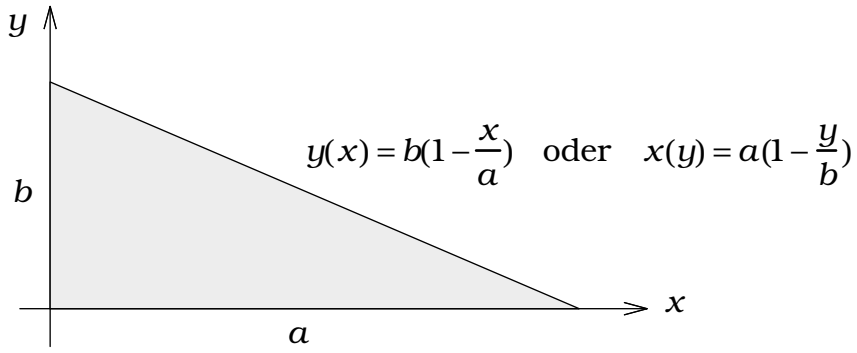
$$J(t):=\int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\Omega(t-\tau))d\tau.$$

Aufgabe 6.4

Man berechne den Dreiecksschwerpunkt S, dessen Koordinaten durch die Flächenintegrale

$$x_S=\frac{1}{A}\int_A x dA, \qquad y_S=\frac{1}{A}\int_A y dA$$

definiert sind.



Aufgabe 6.5

Man berechne den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts und die Koordinate x_S des aus Symmetriegründen auf der x-Achse liegenden Schwerpunktes S.

Aufgabe 6.6

Man berechne die auf die Symmetrieachsen bezogenen Flächenmomente 2. Ordnung (Flächenträgheitsmomente)

$$I_y := \int_A z^2 dA, \qquad I_z := \int_A y^2 dA$$

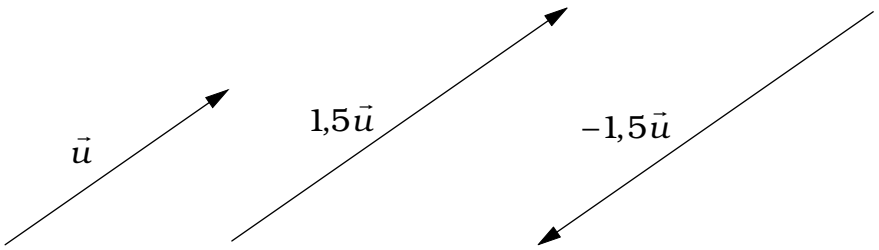
eines Rechtecks mit den Seitenlängen b und h.

Aufgabe 6.7

Man berechne das auf die y-Achse bezogene Flächenmoment 2. Ordnung (Flächenträgheitsmoment) eines Kreises.

Ein Vektor läßt sich im dreidimensionalen Raum anschaulich durch einen Pfeil darstellen, der eine Länge und eine Richtung hat. Alle Pfeile mit gleicher Länge und Richtung repräsentieren den gleichen Vektor.

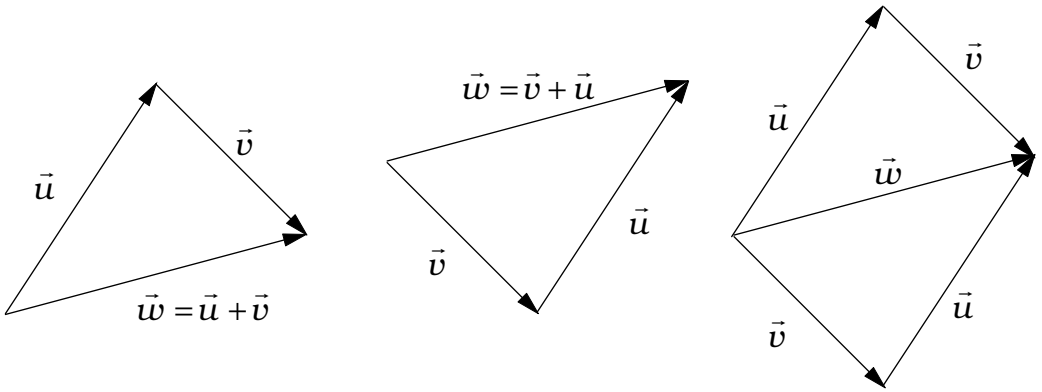
Die Multiplikation eine Vektors $\vec{u}$ mit einer reellen Zahl $\lambda > 0$ ändert nur die Länge des Vektors um den Faktor λ; ist $\lambda < 0$, so wird zusätzlich die Richtung umgekehrt.



Den Pfeil, der das Ergebnis der Addition von zwei Vektoren

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

darstellt, erhält man, wenn man den Anfangspunkt der aneinander gehängten Pfeile für die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ mit dem Endpunkt verbindet.



Parallelogrammkonstruktion

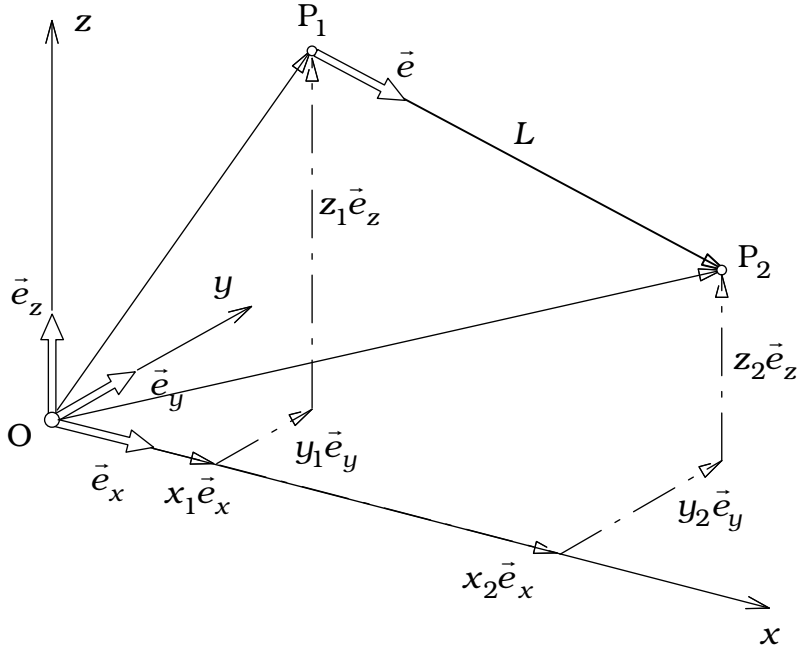
Eine auswertbare graphische Darstellung der Vektoraddition ist nur möglich, wenn alle Vektoren in einer Ebene liegen.

Vektoren $\vec{e}$, deren Länge durch die dimensionslose Zahl 1 beschrieben wird, nennen wir **Einheitsvektoren**; sie geben lediglich eine Richtung an.
Dem **Betrag** $|\vec{u}|$ des Vektors $\vec{u}$ entspricht die Länge des Pfeils. Ist $\vec{e}_u$ der Einheitsvektor in Richtung des Vektors $\vec{u}$, so schreiben wir

$$\vec{u} = |\vec{u}|\vec{e}_u.$$

Für die Orientierung im dreidimensionalen Raum verwenden wir ein kartesisches Koordinatensystem mit den drei zueinander orthogonalen **Basisvektoren**

$\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$. Die Basisvektoren seien „**rechtshändig**“ orientiert, d.h. ihre Richtungen sollen den Richtungen des Daumens ($\rightarrow x$), des Zeigefingers ($\rightarrow y$) und des Mittelfingers ($\rightarrow z$) der rechten Hand entsprechen, wenn man diese Finger zueinander senkrecht ausstreckt. Alle Basisvektoren sind Einheitsvektoren.



Die Raumpunkte P_1 und P_2 haben dann die Koordinaten

$$P_1{:}(x_1, y_1, z_1), \qquad P_2{:}(x_2, y_2, z_2)$$

und die **Ortsvektoren**

$$\vec{OP}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z, \qquad \vec{OP}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z.$$

Wenn die zur Darstellung der Vektoren verwendete Basis vereinbart ist, genügt es, wenn man die Vektoren nur mit ihren Komponenten beschreibt. Das geschieht in der **Darstellung als einspaltige Matrix**

$$\vec{OP}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{OP}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Der Verbindungsvektor der beiden Punkte P_1 und P_2 ergibt sich aus der Vektorgleichung

$$\vec{0P}_2 = \vec{0P}_1 + \vec{P_1P_2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{P_1P_2} = \vec{0P}_2 - \vec{0P}_1$$

$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z; \qquad \vec{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Er hat den Betrag

$$\left| \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =: L;$$

L ist der Abstand der Punkte P_1 und P_2 .

Der Vektor $\vec{P_1P_2}$ kann auch in der Form

$$\vec{P_1P_2} = L\,\vec{e}$$

dargestellt werden. Dabei ist

$$\vec{e} := \frac{\vec{P_1P_2}}{L} = \frac{x_2 - x_1}{L}\vec{e}_x + \frac{y_2 - y_1}{L}\vec{e}_y + \frac{z_2 - z_1}{L}\vec{e}_z$$

der **Richtungsvektor** des Vektors $\vec{P_1P_2}$. $\vec{e}$ ist ein Einheitsvektor, denn sein Betrag hat den Wert 1.

Sind β_x, β_y und β_z die Winkel, die der Vektor $\vec{P_1P_2}$ mit den positiven Koordinatenrichtungen bildet, so gilt

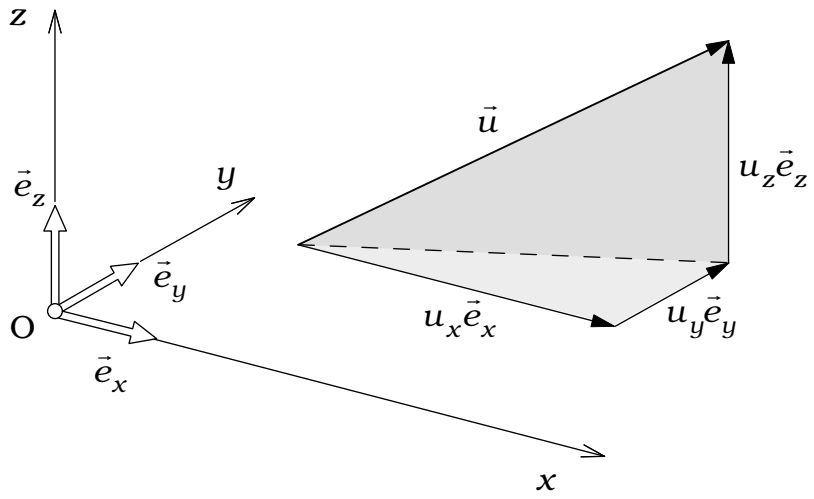
$$\frac{x_2 - x_1}{L} = \cos\beta_x, \qquad \frac{y_2 - y_1}{L} = \cos\beta_y, \qquad \frac{z_2 - z_1}{L} = \cos\beta_z,$$

und den Richtungsvektor $\vec{e}$ können wir schreiben

$$\vec{e} = \cos\beta_x\,\vec{e}_x + \cos\beta_y\,\vec{e}_y + \cos\beta_z\,\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \cos\beta_x \\ \cos\beta_y \\ \cos\beta_z \end{bmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit $\vec{u}$ einen beliebigen Vektor (Kraftvektor, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor, Impulsvektor, ...) im dreidimensionalen Raum. In der kartesischen Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ erhält er die Darstellung

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$



u_x, u_y und u_z sind die **Komponenten** des Vektors $\vec{u}$ in der kartesischen Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

Dividiert man den Vektor durch seinen Betrag

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2},$$

so erhält man den Richtungsvektor von $\vec{u}$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{u_x}{|\vec{u}|}\vec{e}_x + \frac{u_y}{|\vec{u}|}\vec{e}_y + \frac{u_z}{|\vec{u}|}\vec{e}_z.$$

Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen sowie die Addition und Subtraktion von Vektoren geschieht nach folgenden Rechenregeln:

$$\lambda\vec{u} = \lambda u_x \vec{e}_x + \lambda u_y \vec{e}_y + \lambda u_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \\ \lambda u_z \end{bmatrix},$$

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_x \pm v_x)\vec{e}_x + (u_y \pm v_y)\vec{e}_y + (u_z \pm v_z)\vec{e}_z, \qquad \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \pm v_x \\ u_y \pm v_y \\ u_z \pm v_z \end{bmatrix}.$$

Für die Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie und Physik sind zwei

Produktoperationen mit Vektoren definiert: Das innere Produkt (Skalarprodukt) und das Kreuzprodukt (Vektorprodukt).

Als **inneres Produkt** von zwei Vektoren, das wir symbolisch durch einen Punkt zwischen den beiden Vektoren kennzeichnen, ist definiert:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} := |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\text{ Winkel zwischen } \vec{u} \text{ und } \vec{v}\,).$$

($\vec{u}\cdot\vec{v}$ wird gelesen "u in v".)

Das Ergebnis des inneren Produktes zwischen zwei Vektoren ist eine skalare, also von der Wahl der benutzten Basis unabhängige Größe und wird deshalb auch **Skalarprodukt** genannt.

Wenn zwei Vektoren zueinander orthogonal sind, ist ihr inneres Produkt definitionsgemäß null, denn sie bilden miteinander den Winkel $\pi/2$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \vec{u} \text{ orthogonal zu } \vec{v}.$$

Das innere Produkt ist kommutativ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u},$$

und es gilt das Distributivgesetz:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

Für die inneren Produkte mit den zueinander orthogonalen Basisvektoren gilt

$$\vec{e}_a\cdot\vec{e}_b = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a = b \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } a \neq b \text{ ist;} \end{cases} \qquad a,b = x,y,z.$$

Aus den Darstellungen der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z,$$
$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z,$$

folgt dann mit dem Distributivgesetz die **Komponentendarstellung des inneren Produktes:**

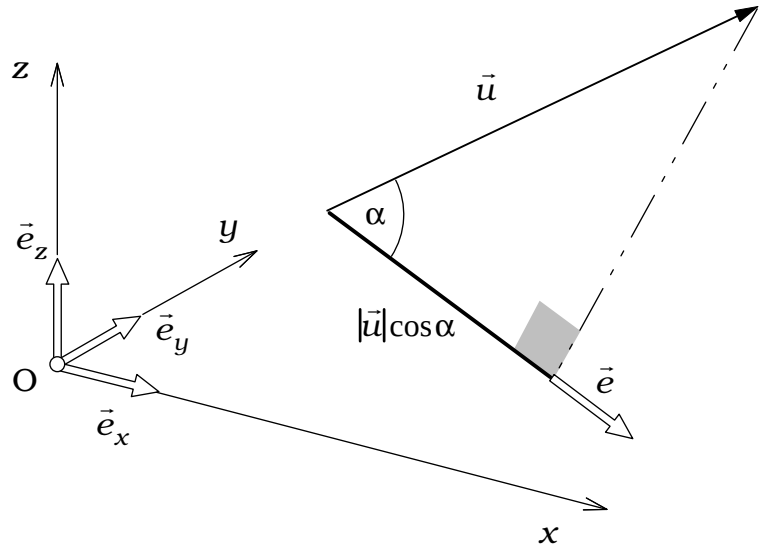
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

Das innere Produkt des Vektors $\vec{u}$ mit einem Richtungsvektor $\vec{e}$

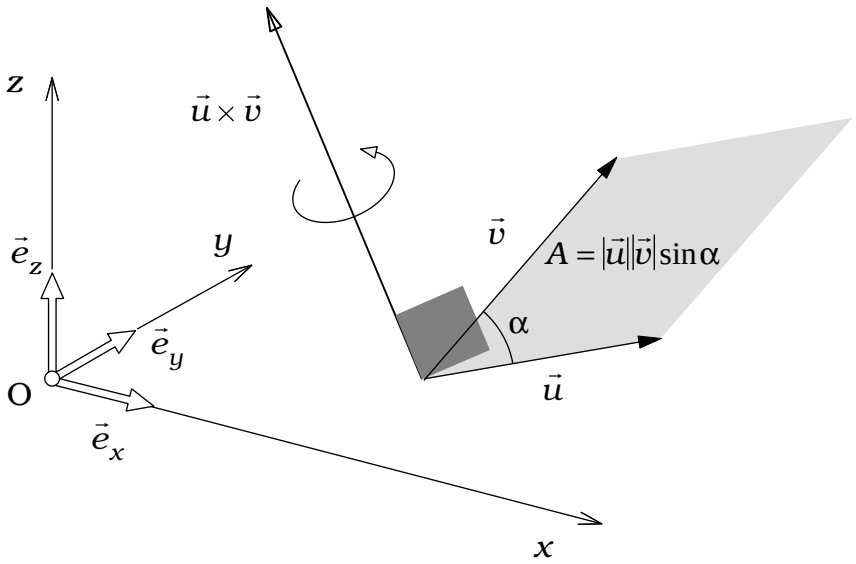
$$\vec{u}\cdot\vec{e} := |\vec{u}|\cos(\text{ Winkel zwischen } \vec{u} \text{ und } \vec{e}\,).$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = |\vec{u}| \cos\alpha.$$

liefert die **Orthogonalprojektion** des Vektors $\vec{u}$ auf die Richtung $\vec{e}$.



Das **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** $\vec{u} \times \vec{v}$ (gelesen: "u Kreuz v") ist nur im dreidimensionalen Raum definiert. Es erzeugt einen Vektor, der auf der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht und so orientiert ist, daß die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{u} \times \vec{v}$ in dieser Reihenfolge einem "rechtshändigen" Bezugssystem entsprechen. Die "rechte-Hand-Regel" ordnet der Richtung von $\vec{u} \times \vec{v}$ die Richtung des ausgestreckten Daumen der rechten Hand zu, wenn man die zur Faust gekrümmten Finger der kürzesten Drehrichtung des Vektors $\vec{u}$ in den Vektor $\vec{v}$ anpaßt.



Als Betrag des Vektors $\vec{u} \times \vec{v}$ ist definiert

$$|\vec{u}\times\vec{v}|:=|\vec{u}||\vec{v}|\sin(\text{ Winkel zwischen }\vec{u}\text{ und }\vec{v}),$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|:=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha.$$

$|\vec{u}\times\vec{v}|$ ist gleich dem „Flächeninhalt A“ des von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

Das Kreuzprodukt ist definitionsgemäß nicht kommutativ; es gilt

$$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}.$$

Die Kreuzprodukte der zueinander orthogonalen Basiseinheitsvektoren ergeben:

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=-\vec{e}_y\times\vec{e}_x=\vec{e}_z,$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_z=-\vec{e}_z\times\vec{e}_y=\vec{e}_x,$$
$$\vec{e}_z\times\vec{e}_x=-\vec{e}_x\times\vec{e}_z=\vec{e}_y.$$

Mit diesen Formeln und dem Distributivgesetz

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},$$

erhalten wir aus den Komponentendarstellungen der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

$$\vec{u}=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y+u_z\vec{e}_z,$$
$$\vec{v}=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z,$$

die **Komponentendarstellung des Kreuzproduktes**

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_yv_z-u_zv_y\\u_zv_x-u_xv_z\\u_xv_y-u_yv_x\end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Determinante einer $2\times2-$Matrix

$$\det\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}:=ad-bc$$

läßt sich ein einfaches Schema für die Berechnung der drei Komponenten des Vektors $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ angeben: Die i-te Komponente (i=1,2,3) von $\vec{w}$ erhält man, indem man die i-te Zeile in $\vec{u}\times\vec{v}$ abdeckt und mit den sichtbaren 2×2 Komponenten die Determinante berechnet; für die zweite Komponente von $\vec{w}$ muß noch mit dem Faktor (-1) multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} w_x \\ - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} - \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} - \\ w_y \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ - \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ - \\ v_z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} - \\ - \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ - \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ - \end{bmatrix},$$

$$w_x = \det\begin{bmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{bmatrix} \qquad w_y = -\det\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{bmatrix} \qquad w_z = \det\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$$

Vorzeichen beachten

Weil der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ definitionsgemäß orthogonal zu den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist, gilt

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

Das innere Produkt des Vektors $\vec{a}$ mit dem Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nennt man **Spatprodukt** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$; es gilt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

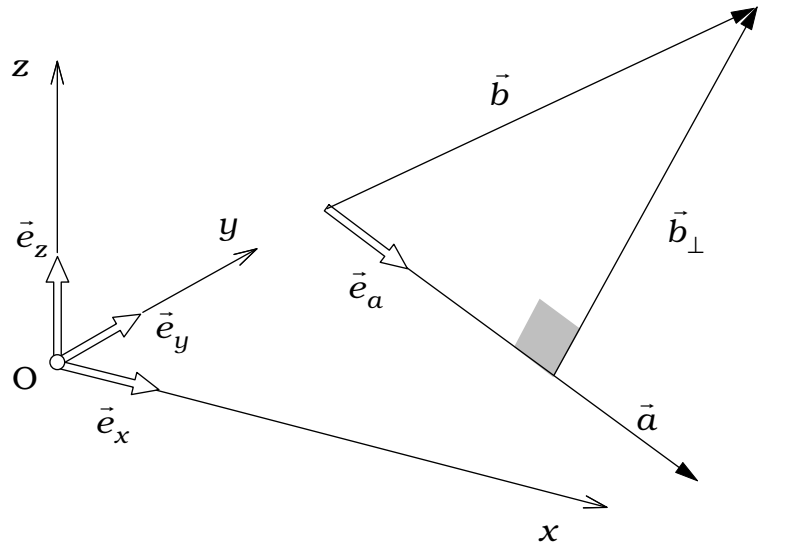
Bilden $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die von einer Ecke eines Parallelepipeds ausgehenden Kanten, so ist das Spatprodukt das Volumen dieses Körpers.

Aus der Formel für das **doppelte Kreuzprodukt**

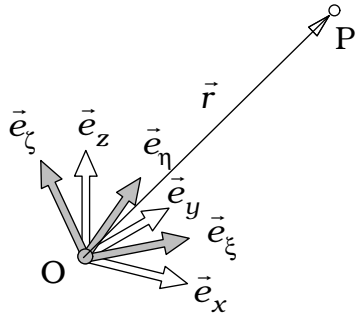
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

folgt

$$\vec{e}_a \times (\vec{b} \times \vec{e}_a) = (\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a)\vec{b} - (\vec{e}_a \cdot \vec{b})\vec{e}_a = \vec{b} - |\vec{b}| \cos\alpha \, \vec{e}_a = \vec{b}_\perp.$$



Die Koordinaten eines Punktes P hängen ab von der zur Darstellung des Ortsvektors benutzten orthogonalen Basis.



$$\vec{r} = \begin{cases} x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z & \text{in der Basis } \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \\ \xi\,\vec{e}_\xi + \eta\,\vec{e}_\eta + \zeta\,\vec{e}_\zeta & \text{in der Basis } \{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\} \end{cases}$$

Die Formeln für die **Koordinatentransformation** $\{x, y, z\} \leftrightarrow \{\xi, \eta, \zeta\}$ der Koordinaten des Punktes P erhalten wir über die inneren Produkte des Ortsvektors mit den Basisvektoren der entsprechenden Basis:

$$\xi = (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\xi, \qquad x = (\xi\,\vec{e}_\xi + \eta\,\vec{e}_\eta + \zeta\,\vec{e}_\zeta)\cdot\vec{e}_x,$$
$$\eta = (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\eta, \qquad y = (\xi\,\vec{e}_\xi + \eta\,\vec{e}_\eta + \zeta\,\vec{e}_\zeta)\cdot\vec{e}_y,$$
$$\zeta = (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\zeta; \qquad z = (\xi\,\vec{e}_\xi + \eta\,\vec{e}_\eta + \zeta\,\vec{e}_\zeta)\cdot\vec{e}_z.$$

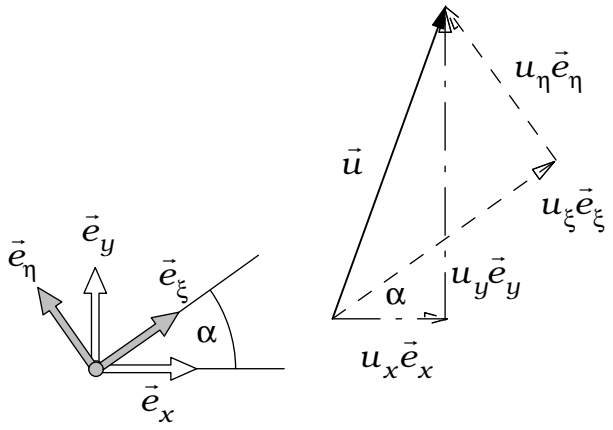
Entsprechendes gilt für die Komponenten eines Vektors $\vec{u}$ in zwei unterschiedlichen orthogonalen Basissystemen.

$$\vec{u} = \begin{cases} u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z & \text{in der Basis } \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \\ u_\xi\vec{e}_\xi + u_\eta\vec{e}_\eta + u_\zeta\vec{e}_\zeta & \text{in der Basis } \{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\} \end{cases}$$

$$u_\xi = (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\xi\cdot\vec{e}_z)u_z, \qquad u_x = (\vec{e}_x\cdot\vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_x\cdot\vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_x\cdot\vec{e}_\zeta)u_\zeta,$$
$$u_\eta = (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\eta\cdot\vec{e}_z)u_z, \qquad u_y = (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_y\cdot\vec{e}_\zeta)u_\zeta,$$
$$u_\zeta = (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\zeta\cdot\vec{e}_z)u_z; \qquad u_z = (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\zeta)u_\zeta.$$

Der Betrag des Vektors $\vec{u}$ hängt nicht von der zur Darstellung des Vektors gewählten Basis ab; er ist eine **Invariante** des Vektors.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2} = \sqrt{u_\xi{}^2 + u_\eta{}^2 + u_\zeta{}^2}.$$



Ist insbesondere die $\{\vec{e}_\xi,\vec{e}_\eta,\vec{e}_\zeta\}$-Basis um den Winkel α um die $\vec{e}_z$-Achse gegenüber der $\{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\}$-Basis gedreht, also

$$\vec{e}_\xi = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_x = \cos\alpha\,\vec{e}_\xi - \sin\alpha\,\vec{e}_\eta,$$
$$\vec{e}_\eta = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_y = \sin\alpha\,\vec{e}_\xi + \cos\alpha\,\vec{e}_\eta,$$
$$\vec{e}_\zeta = \vec{e}_z, \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_\zeta,$$

so wird

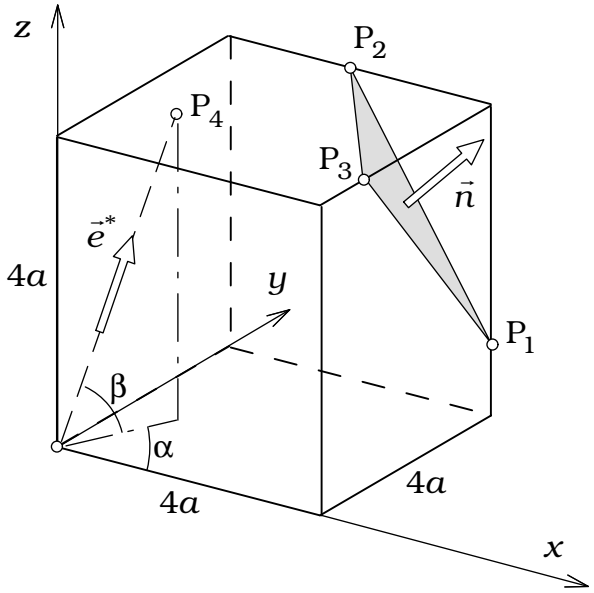
$$u_\xi = u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha, \qquad u_x = u_\xi\cos\alpha - u_\eta\sin\alpha,$$
$$u_\eta = -u_x\sin\alpha + u_y\cos\alpha, \qquad u_y = u_\xi\sin\alpha + u_\eta\cos\alpha,$$
$$u_\zeta = u_z; \qquad u_z = u_\zeta.$$

▼ Beispiele:

Ein Würfel der Kantenlänge $4a$ soll vom Punkt O aus in Richtung $\vec{e}^*$ durchbohrt werden. Außerdem soll mit einem Schnitt durch die Punkte

$$P_1{:}(4a,4a,a),\quad P_2{:}(2a,4a,4a),\quad P_3{:}(4a,a,4a),$$

eine Würfelecke abgetrennt werden. Man berechne: Die Koordinaten x_4,y_4 des Bohrloches P_4, die Länge L der Bohrung, die Größe A und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ der dreieckigen Schnittfläche, den Abstand d der Schnittfläche vom Punkt O, die Gleichung der Ebene durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 und die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen.



Aus

$$\vec{e}^* = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{OP_4} = L\vec{e}^* = \begin{bmatrix} L\cos\beta\cos\alpha \\ L\cos\beta\sin\alpha \\ L\sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 4a \end{bmatrix},$$

folgt

$$L = \frac{4a}{\sin\beta}, \qquad x_4 = 4a\frac{\cos\alpha}{\tan\beta}, \qquad y_4 = 4a\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}.$$

Mit der Definition des Kreuzproduktes erhalten wir

$$A\,\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ 3a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3a \\ 3a \end{bmatrix} = \frac{3a^2}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{3\sqrt{17}a^2}{2}}_{A}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{n}},$$

$$A = \frac{3\sqrt{17}}{2}a^2, \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Der Abstand d ist die Orthogonalprojektion des Ortsvektors eines Flächenpunktes auf den von O in Richtung $\vec{n}$ weisenden Einheitsvektor:

$$d = \overrightarrow{OP_i} \cdot \vec{n} \qquad (i = 1,2,3),$$

$$d = a\begin{bmatrix}4\\4\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}4\\1\\4\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{22}{\sqrt{17}}a = 5{,}336\,a.$$

Ist $\vec{r}_E$ der Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene durch die Punkte P_1, P_2, P_3, so gilt

$$\vec{r}_E\cdot\vec{n} = d, \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{22}{\sqrt{17}}a$$

$$3x + 2y + 2z = 22a.$$

Aus dieser Ebenengleichung erhalten wir die Abschnittsgleichung

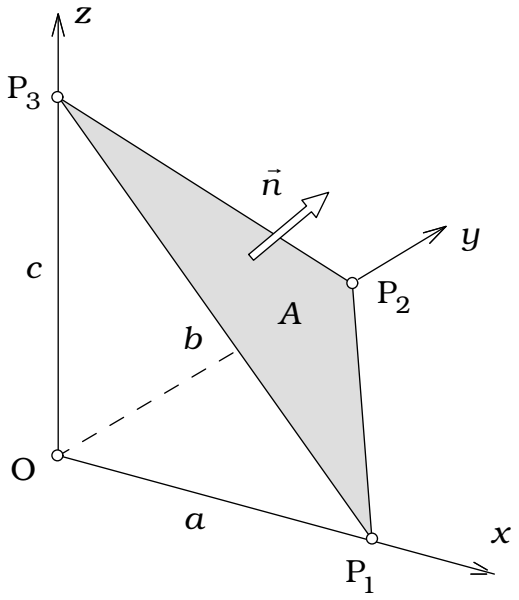
$$\frac{x}{22a/3} + \frac{y}{11a} + \frac{z}{11a} = 1,$$

der man sofort die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen entnehmen kann:

$\frac{22}{3}a$ auf der x - Achse, $11a$ auf der y - und der z - Achse.

▲

▼



Für den Tetraeder $OP_1P_2P_3$ bestimme man die Beziehungen zwischen den drei

zu den Koordinatenebenen parallelenTetraederflächen und der vierten Fläche A.

$$A\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{P_1P_2}) \times (\vec{P_1P_3}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix};$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2},$$

$$\text{Fläche } OP_1P_3 = \frac{ac}{2} = An_y,$$

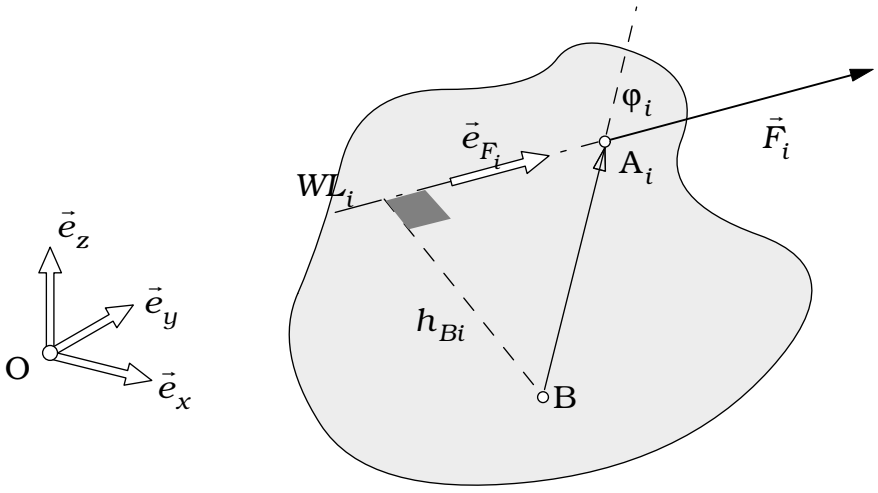
$$\text{Fläche } OP_2P_1 = \frac{ba}{2} = An_z,$$

$$\text{Fläche } OP_3P_2 = \frac{cb}{2} = An_x.$$

▲

▼

Die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Körper hängt ab von der Intensität, der Richtung und dem Angriffspunkt der Kraft. Deshalb beschreibt man Kräfte als Vektoren.



Der **Kraftvektor** $\vec{F}_i$ im Angiffspunkt A_i erhält in der kartesischen Basis die Darstellung

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y + F_{iz}\vec{e}_z = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}.$$

Der **Betrag der Kraft**

$$\left|\vec{F}_i\right| = \sqrt{F_{ix}{}^2 + F_{iy}{}^2 + F_{iz}{}^2}$$

wird in der Einheit

$$1\text{Newton} = 1\text{N} := 1\text{kgms}^{-2}$$

gemessen. Der Richtungsvektor der Kraft ist

$$\vec{e}_{F_i} = \frac{1}{\left|\vec{F}_i\right|}\vec{F}_i = \frac{1}{\sqrt{F_{ix}{}^2 + F_{iy}{}^2 + F_{iz}{}^2}} \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}.$$

Die Gerade WL_i in Richtung $\vec{e}_{F_i}$ durch den Angriffspunkt A_i der Kraft nennt man die **Wirkungslinie** der Kraft.

Die Drehwirkung der Kraft $\vec{F}_i$ bezüglich des Körperpunktes B wird durch den **Momentenvektor**

$$\vec{M}_{iB} := \vec{BA}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{iB} := \begin{bmatrix} x_{A_i} - x_B \\ y_{A_i} - y_B \\ z_{A_i} - z_B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{A_i} - y_B)F_{iz} - (z_{A_i} - z_B)F_{iy} \\ (z_{A_i} - z_B)F_{ix} - (x_{A_i} - x_B)F_{iz} \\ (x_{A_i} - x_B)F_{iy} - (y_{A_i} - y_B)F_{ix} \end{bmatrix}.$$

beschrieben, wobei

$$\vec{0A}_i = \vec{0B} + \vec{BA}_i, \quad \rightarrow \quad \vec{BA}_i = \vec{0A}_i - \vec{0B},$$

berücksichtigt wurde.

Aus dem Betrag des Momentenvektors

$$\left|\vec{M}_{iB}\right| = \left|\vec{BA}_i\right|\left|\vec{F}_i\right|\sin\varphi_i = h_{Bi}\left|\vec{F}_i\right|, \qquad h_{Bi} := \left|\vec{BA}_i\right|\sin\varphi_i,$$

erkennt man, daß es zweckmäßig sein kann, den **Hebelarm** h_{Bi} als Abstand der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_i$ vom Momentenbezugspunkt B einzuführen. Da sich der Hebelarm bei Verschiebung des Kraftvektors auf seiner Wirkungslinie

nicht ändert, bleibt auch die Drehwirkung der Kraft auf den Körper ungeändert, wenn man den Angriffspunkt der Kraft auf der Wirkungslinie im Körper verschiebt.

Wenn am Körper n Kräfte in verschiedenen Körperpunkten angreifen, definiert man als **Kräftesumme** $\vec{F}$ und auf den Punkt B bezogene **Momentensumme** $\vec{M}_B$

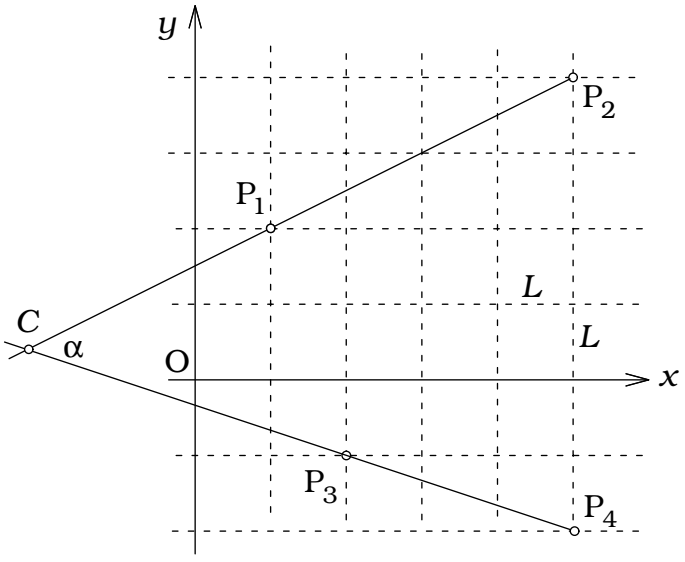
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \qquad \vec{M}_B = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BA}_i \times \vec{F}_i.$$

Das Kräftesystem $\{\vec{F}_i \text{ in } A_i, \quad i = 1,2,...,n\}$ wird **Gleichgewichtssystem** genannt, wenn Kräfte- und Momentensumme null sind:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{BA}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}.$$

▲

Aufgabe 7.1



Man berechne die Richtungsvektoren der beiden Geraden, den Winkel α, den sie miteinander bilden, den Schnittpunkt C und die Abstände λ_1 und λ_2 des Schnittpunktes von den Punkten P_1 und P_3.

Aufgabe 7.2

Die Ebene E

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

schneidet die Koordinatenachsen in den Schnittpunkten P_1,P_2,P_3 mit den Ortsvektoren

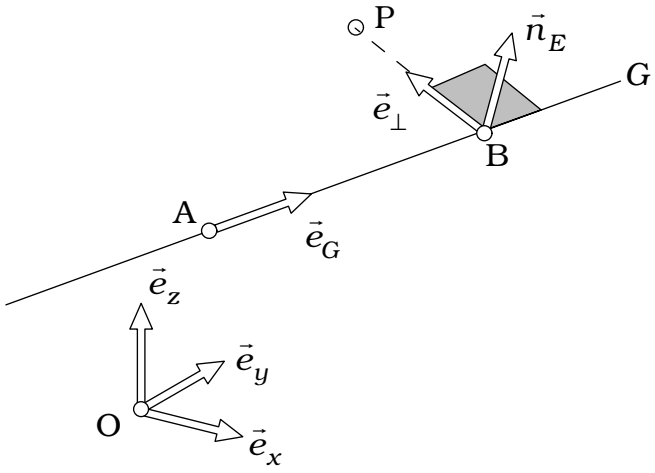
$$\vec{r}_1 = a\vec{e}_x, \quad \vec{r}_2 = b\vec{e}_y, \quad \vec{r}_3 = c\vec{e}_z.$$

Man berechne den Inhalt A des Dreiecks P_1,P_2,P_3, den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ auf der Ebene und zeige, daß auch der Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{e}_x + \frac{1}{b}\vec{e}_y + \frac{1}{c}\vec{e}_z$$

zur Ebene E orthogonal ist.

Aufgabe 7.3



Man berechne den Abstand d_P des Punktes P von der Geraden G durch den Punkt A in Richtung $\vec{e}_G$, den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_E$ der Ebene E durch P und die Gerade G, den Abstand d_E der Ebene E vom Koordinatenursprung O sowie die die Schnittpunkte a,b und c der Ebene E mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 7.4

Man berechne den kürzesten Abstand h der Punkte von zwei Geraden (= Abstand der Geraden)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \lambda_1\vec{e}_1, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_B + \lambda_2\vec{e}_2,$$

die sich nicht schneiden.

Aufgabe 7.5

Man berechne die Schnittgerade der beiden nicht-parallelen Ebenen

$$\mathrm{E}_1\colon \quad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1, \qquad\qquad \mathrm{E}_2\colon \quad \frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}+\frac{z}{c_2}=1.$$

Es sei $(a_1/a_2)\neq(b_1/b_2)$.

Aufgabe 7.6

Man berechne die Entfernung a zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche (Radius R). Die Lage der Punkte auf der Kugel wird durch Kugelkoordinaten ϑ und φ beschrieben.

Aufgabe 7.7

Man berechne die Schnittkurve eines Kreiszylinders (Radius r, z-Achse = Zylinderachse) mit einer Ebene, die mit der xy-Ebene den Winkel α bildet und die y-Achse enthält.

Aufgabe 7.8

Man berechne die Schnittkurve eines Kreiskegels um die z-Achse mit einer Ebene, die mit der x-Achse den Winkel β bildet und die z-Achse im Abstand h von der xy-Ebene schneidet.

Aufgabe 1.1

$$B_1 + B_2 = \frac{14}{21} + \frac{12}{21} = \frac{26}{21}, \quad B_1 - B_2 = \frac{14}{21} - \frac{12}{21} = \frac{2}{21},$$

$$B_1 B_2 = \frac{8}{21}, \quad B_1 / B_2 = \frac{2}{3}\,\frac{7}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}.$$

Aufgabe 1.2

$$B_1 + B_2 + B_3 = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}, \qquad B_1 B_2 B_3 = \frac{1}{24}.$$

Aufgabe 1.3

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}, \qquad R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}.$$

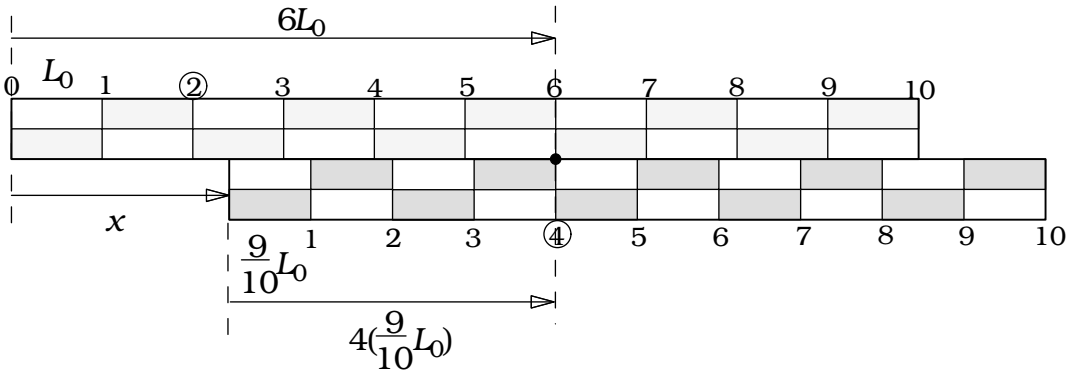
Wenn $R_1 > R_2 > R_3$ ist, wird

$$R = \frac{R_1}{1 + R_1/R_2 + R_1/R_3} < \frac{R_1}{3}.$$

Aufgabe 1.4

$$B = \frac{1}{1 + \dfrac{1+a}{2+a}} = \frac{2+a}{3+2a}.$$

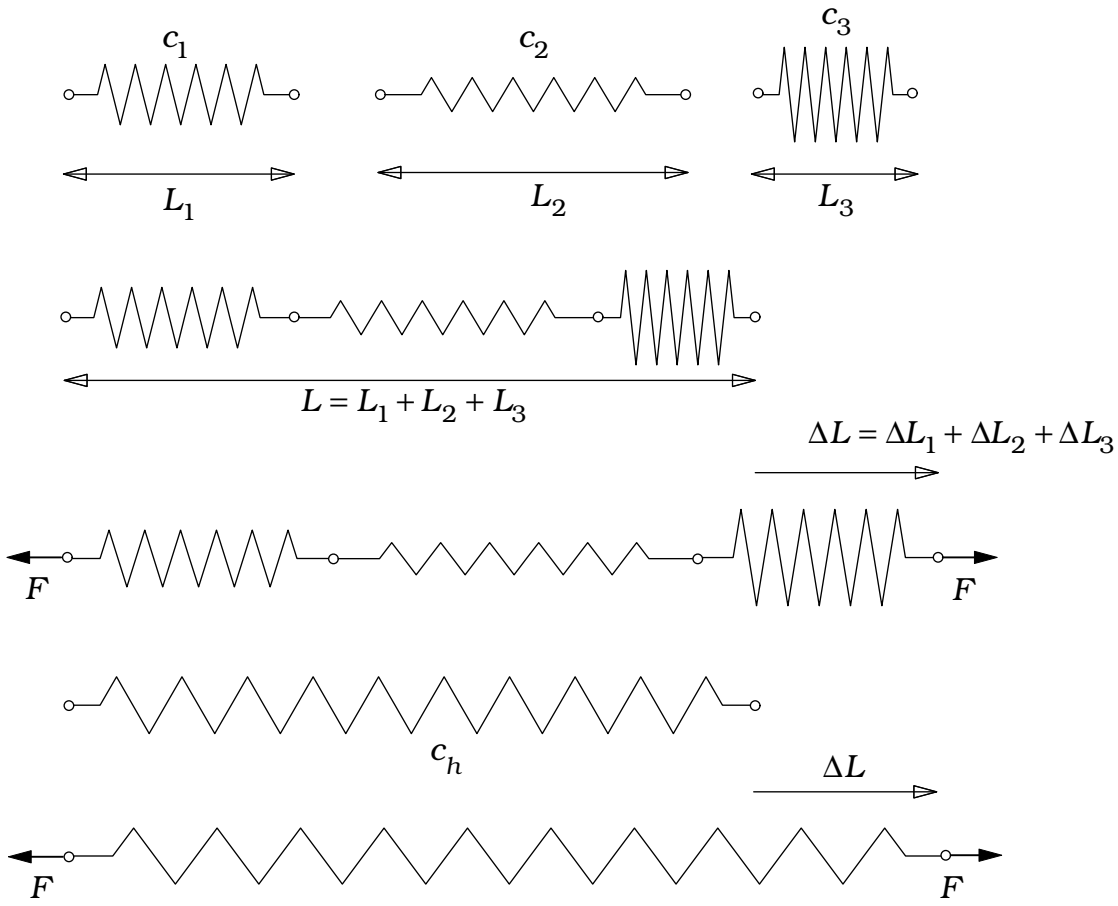
Aufgabe 1.5



$$x = 6L_0 - 4\left(\frac{9}{10} L_0\right) = (6 - 3{,}6) L_0 = 2{,}4 L_0.$$

Bei einer Schieblehre ist $L_0 = 1\,\text{mm}$, also kann man mit Hilfe des Nonius auf $L_0 = 1/10\,\text{mm}$ genau messen.

Aufgabe 1.6



$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 \quad \rightarrow \quad \frac{F}{c_h} = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \frac{F}{c_3},$$

$$\frac{1}{c_h} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad \rightarrow \quad c_h = \frac{c_1 c_2 c_3}{c_2 c_3 + c_3 c_1 + c_1 c_2}.$$

Aufgabe 1.7

$$\left|\boldsymbol{z}_1\right| = \sqrt{9+16} = 5, \qquad \left|\boldsymbol{z}_2\right| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 = 5 - i2,$$

$$\boldsymbol{z}_1 \boldsymbol{z}_2 = (3+i4)(2-i6) = 6 - i18 + i8 + 24 = 30 - i10 = 10(3-i),$$

$$1/\boldsymbol{z}_1 = \frac{1}{3+i4} = \frac{3-i4}{(3+i4)(3-i4)} = \frac{1}{25}(3-i4),$$

$$\boldsymbol{z}_1/\boldsymbol{z}_2 = \frac{3+i4}{2-i6} = \frac{(3+i4)(2+i6)}{(2-i6)(2+i6)} = \frac{6+i18+i8-24}{40} = \frac{1}{20}(-9+i13).$$

Aufgabe 1.8

$$\boldsymbol{z}_2 + \bar{\boldsymbol{z}}_2 = -1, \qquad \boldsymbol{z}_2\bar{\boldsymbol{z}}_2 = 1,$$

$$(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_2)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_3) = (\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_2)(\boldsymbol{z}-\bar{\boldsymbol{z}}_2) = \boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z}(\boldsymbol{z}_2+\bar{\boldsymbol{z}}_2) + \boldsymbol{z}_2\bar{\boldsymbol{z}}_2 = \boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{z} + 1,$$

$$(\boldsymbol{z}-1)(\boldsymbol{z}^2+\boldsymbol{z}+1) = \boldsymbol{z}^3 + \boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z} - 1,$$

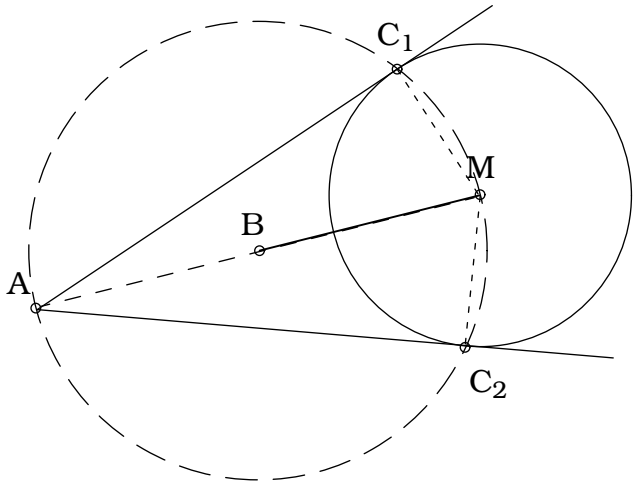
$$(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_2)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_3) = \boldsymbol{z}^3 - 1.$$

$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2$ und $\boldsymbol{z}_3$ sind die drei Lösungen der Gleichung

$$\boldsymbol{z}^3 - 1 = 0.$$

Aufgabe 2.1

Um den Mittelpunkt B der Strecke AM wird der Kreis durch M gezeichnet. Er schneidet den Kreis um M in den Punkten C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke AC_1M und AC_2M über dem Kreisdurchmesser AM haben in C_1 und C_2 rechte Winkel, also sind AC_1 und AC_2 die Tangenten von A an den Kreis um M.



Aufgabe 2.2

$$h^2 = b^2 - {c_1}^2,$$
$$h^2 = a^2 - {c_2}^2,$$
$$2h^2 = a^2 + b^2 - {c_1}^2 - {c_2}^2 = (c_1+c_2)^2 - {c_1}^2 - {c_2}^2 = 2c_1c_2,$$

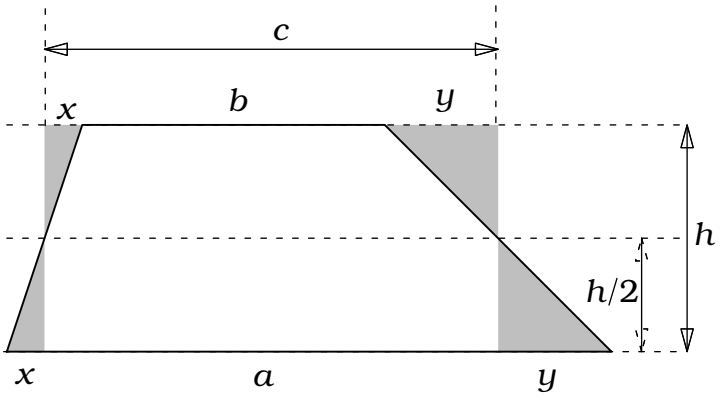
$$h^2 = c_1c_2.$$

Aufgabe 2.3

$$c^2 = a^2 + a^2 \qquad \rightarrow \qquad c = \sqrt{2}a.$$

$$h^2 = b^2 - (b/2)^2 = \frac{3}{4}b^2, \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

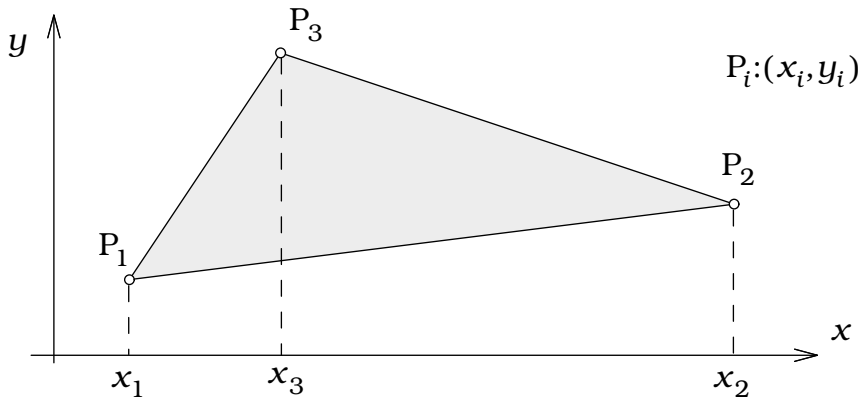
Aufgabe 2.4



$$A = ch,$$

$$\left.\begin{aligned} c &= b + x + y, \\ c &= a - x - y, \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad 2c = a + b, \quad \rightarrow \quad A = \frac{a+b}{2}h.$$

Aufgabe 2.5



Wir zerlegen die Fläche unter der Dreieckseiten P_1P_2 und P_3P_2 in drei Trapeze und berechnen deren Flächeninhalte:

$$A = (x_3 - x_1)\frac{1}{2}(y_3 + y_1) + (x_2 - x_3)\frac{1}{2}(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)\frac{1}{2}(y_2 + y_1),$$

$$A = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_1y_2 - x_2y_1), \qquad A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2.6

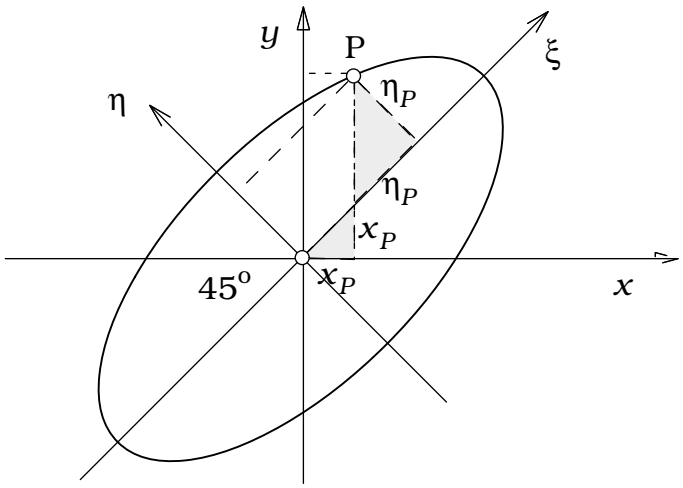
Für den Punkt P auf der Ellipse gilt

$$\xi = x - x_C, \qquad \eta = y - y_C.$$

Daraus folgt:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1.$$

Aufgabe 2.7



Es gilt

$$\xi_P=\sqrt{2}x_P+\eta_P,\qquad y_P=x_P+\sqrt{2}\eta_P.$$

Daraus folgt

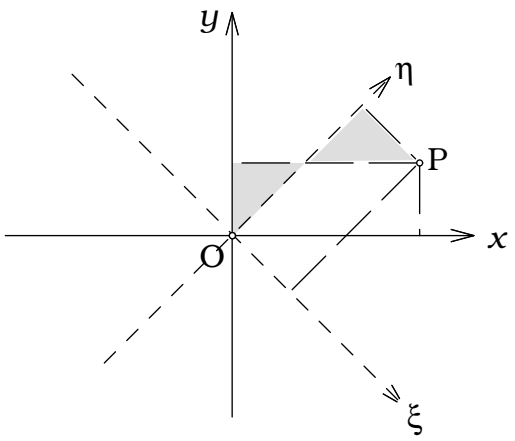
$$\eta_P=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_P-x_P),\qquad \xi_P=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_P+x_P),$$

und als Ellipsengleichung

$$\frac{(y+x)^2}{2a^2}+\frac{(y-x)^2}{2b^2}=1.$$

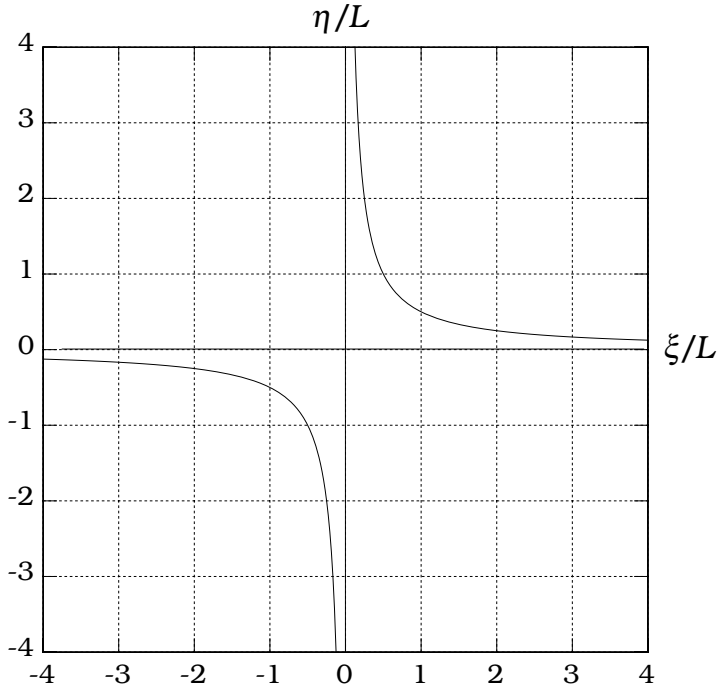
Aufgabe 2.8

Die Koordinatentransformation läßt sich aus dem folgenden Bild ablesen:



$$\begin{aligned} x_P &= y_P + \sqrt{2}\xi_P, \\ \eta_P &= \sqrt{2}y_P + \xi_P. \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x_P &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_P + \xi_P), \\ y_P &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_P - \xi_P). \end{aligned}$$

$$x^2 - y^2 = L^2, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(\eta+\xi)^2 - \frac{1}{2}(\eta-\xi)^2 = L^2, \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{L^2}{2\xi}.$$



Aufgabe 2.9

Aus den Transformationsgleichungen in Aufgabe 2.8

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \xi), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi),$$

folgt

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y).$$

$$\frac{1}{2}(x-y)(x+y) = L^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{2L^2} - \frac{y^2}{2L^2} = 1.$$

Hinweis:
Das Stoffgesetz eines idealen Gases lautet:

$$pV = nRT.$$

Dabei ist p der Druck des Gases, das im Volumen V bei der absoluten Temperatur T eingeschlossen ist.

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\text{Masse des Gases}}{\text{Molmasse des Gases}}$$

ist die Molzahl der Gasmenge und

$$R = 8{,}31441 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot {}^{o}\text{K}}$$

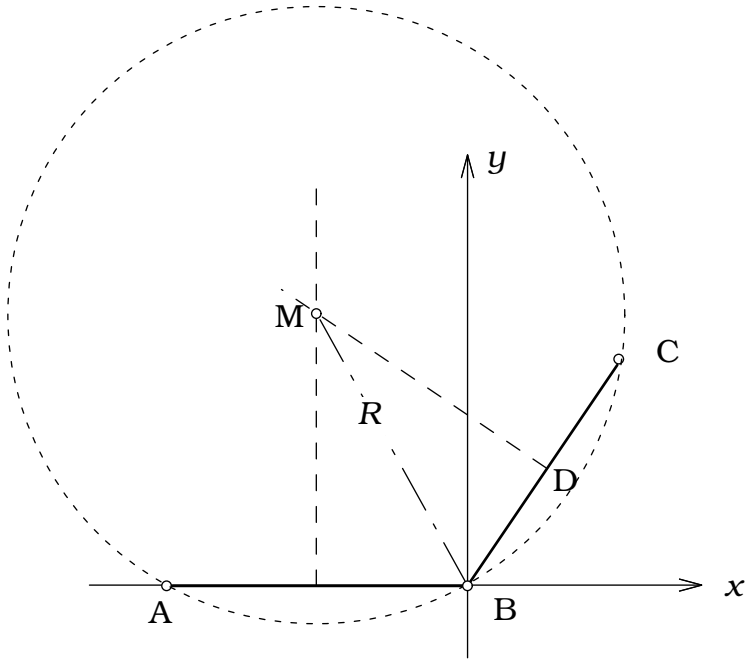
die universelle Gaskonstante.

Ändert man bei konstant gehaltener Temperatur T das Volumen V, so ändert sich der Druck p nach dem Gesetz

$$pV = const = p_0 V_0.$$

Die graphische Darstellung in einem pV-Diagramm nennt man Isotherme; sie ist eine Hyperbel. Für unterschiedliche Temperaturen T erhält man Hyperbeln mit jeweils einem der Temperatur entsprechenden Parameter.

Aufgabe 2.10



$\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind Sehnen des gesuchten Kreises. Der Kreismittelpunkt M liegt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den beiden Sehnen. Deshalb ist

$$x_M = -a/2, \qquad (a/2)^2 + {y_M}^2 = R^2,$$

$$(\overline{BD})^2 + (\overline{MD})^2 = R^2,$$

und mit

$$(\overline{BD})^2 = (x_C/2)^2 + (y_C/2)^2, \qquad (\overline{MD})^2 = ((a/2) + (x_C/2))^2 + ((y_M - (y_C/2))^2$$

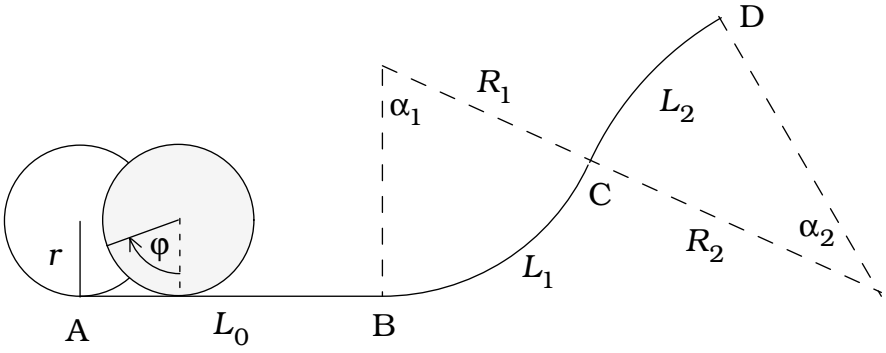
wird

$$\frac{a^2}{4}+{y_M}^2=\frac{{x_C}^2}{4}+\frac{{y_C}^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{{x_C}^2}{4}+\frac{ax_C}{2}+{y_M}^2+\frac{{y_C}^2}{4}-y_My_C,$$

$$y_M=\frac{{x_C}^2+{y_C}^2+ax_C}{2y_C}.$$

Aufgabe 2.11

Abrollen des Rades bedeutet, daß die abgerollten Bogenlängen auf der Bahn und dem Rad übereinstimmen.



Beim Drehwinkel des Rades muß die Neigungsänderung der Bahn zusätzlich berücksichtigt werden.

$$\varphi_B=\frac{L_0}{r},$$

$$\varphi_C=\varphi_B+\frac{L_1}{r}-\alpha_1=\frac{L_0}{r}+(\frac{R_1}{r}-1)\alpha_1,$$

$$\varphi_D=\varphi_C+\frac{L_2}{r}+\alpha_2=\frac{L_0}{r}+(\frac{R_1}{r}-1)\alpha_1+(\frac{R_2}{r}+1)\alpha_2.$$

Aufgabe 3.1

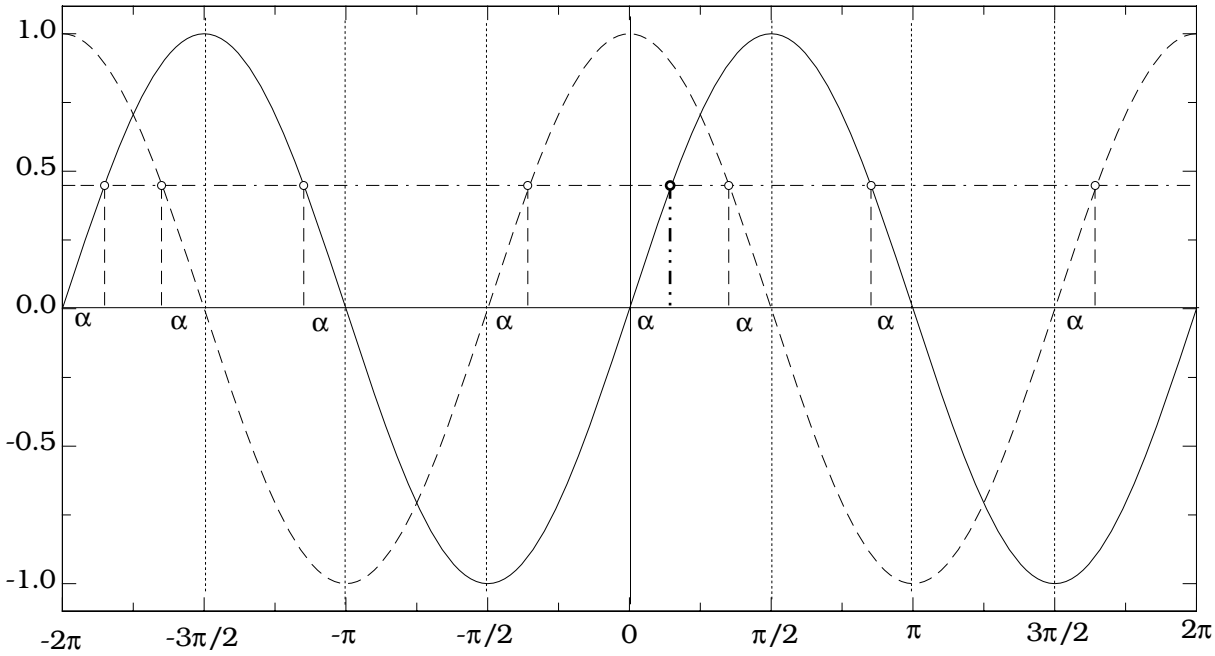
$$\rho=7{,}86\frac{10^{-3}\mathrm{kg}}{(10^{-2}\mathrm{m})^3}=7{,}86\cdot10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\qquad 1\mathrm{N}:=1\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\qquad\rightarrow\qquad 1\mathrm{kg}=1\frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}},$$

$$\rho=7{,}86\cdot10^3\,\frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^4}.$$

$$g:=9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\qquad\text{(Fallbeschleunigung)}$$

$$\gamma = 7{,}71 \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}.$$

Aufgabe 3.2



Aus den Funktionsgraphen folgt:

$$\sin\alpha = \begin{cases} \sin(-2\pi+\alpha) = \sin(-\pi-\alpha) = \sin(\pi-\alpha) \\ \cos(-3\pi/2-\alpha) = \cos(-\pi/2+\alpha) = \cos(\pi/2-\alpha) = \cos(3\pi/2+\alpha) \end{cases}.$$

Mit den Additionstheoremen erhalten wir:

$$\sin(-2\pi+\alpha) = \sin\alpha \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \cos\alpha \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} = \sin\alpha,$$

$$\sin(-\pi-\alpha) = -\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \cos\alpha \underbrace{\sin(\pi)}_{0} = \sin\alpha,$$

$$\sin(\pi-\alpha) = -\sin(\alpha-\pi) = -\sin\alpha \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \cos\alpha \underbrace{\sin(\pi)}_{0} = \sin\alpha,$$

$$\cos(-3\pi/2-\alpha) = \cos(3\pi/2+\alpha) = \cos\alpha \underbrace{\cos(3\pi/2)}_{0} - \sin\alpha \underbrace{\sin(3\pi/2)}_{-1} = \sin\alpha,$$

$$\cos(-\pi/2+\alpha) = \cos(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} + \sin\alpha \underbrace{\sin(\pi/2)}_{1} = \sin\alpha.$$

Aufgabe 3.3

$$A_1\{\sin(\omega t)\cos\varphi_1 + \cos(\omega t)\sin\varphi_1\} + A_2\{\sin(\omega t)\cos\varphi_2 + \cos(\omega t)\sin\varphi_2\} =$$
$$= A\{\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\},$$

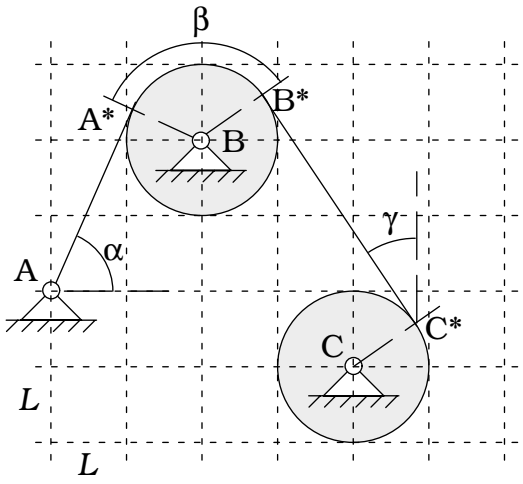
Vergleich der Faktoren von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi,$$
$$A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi.$$

Daraus folgt:

$$A^2 = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2,$$
$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right).$$

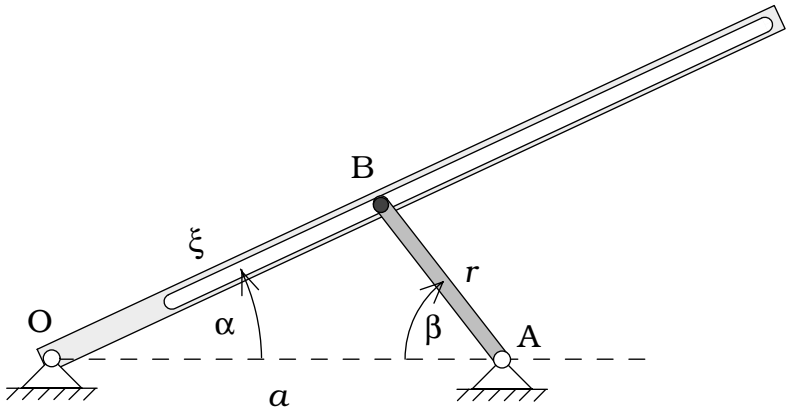
Aufgabe 3.4



Es ist

$$\overline{AB} = \sqrt{(2L)^2 + (2L)^2} = 2\sqrt{2}L, \qquad \overline{BC} = \sqrt{(2L)^2 + (3L)^2} = \sqrt{13}L,$$
$$\overline{AA^*} = \sqrt{(\overline{AB})^2 - L^2} = \sqrt{7}L, \qquad \overline{B^*C^*} = \overline{BC}.$$
$$\begin{aligned} 2L + L\cos\alpha &= \sqrt{7}L\sin\alpha, \\ 2L - L\sin\alpha &= \sqrt{7}L\cos\alpha; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \sqrt{7}\sin\alpha - \cos\alpha &= 2, \\ \sin\alpha + \sqrt{7}\cos\alpha &= 2; \end{aligned}$$
$$\sin\alpha = \tfrac{1}{4}(\sqrt{7}+1), \qquad \cos\alpha = \tfrac{1}{4}(\sqrt{7}-1),$$
$$\sin\gamma = \frac{2L}{\sqrt{13}L} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \cos\gamma = \frac{3L}{\sqrt{13}L} = \frac{3}{\sqrt{13}};$$
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right) = 1{,}1468 = 65{,}7^{\circ}, \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 0{,}588 = 33{,}7^{\circ}.$$
$$\beta = \alpha + (\pi/2 - \gamma), \qquad \beta = 2{,}129 = 122^{\circ}.$$

Aufgabe 3.5



Kinematische Zwangsbedingungen:

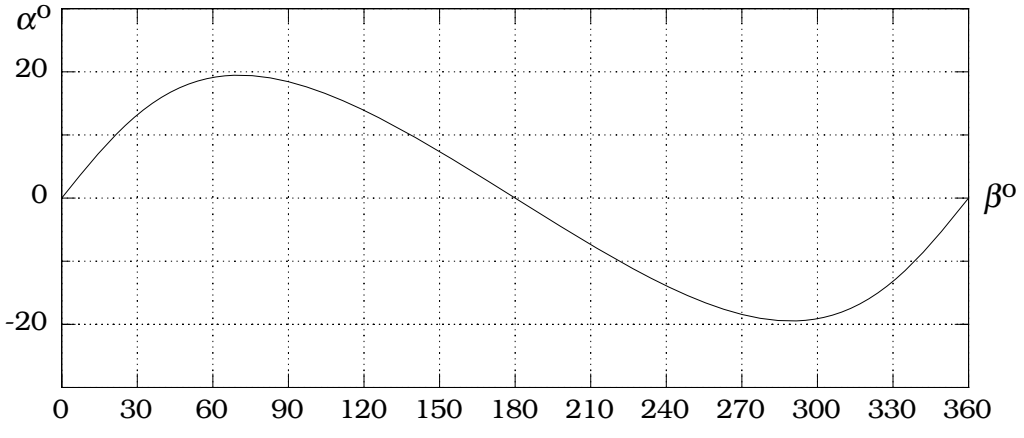
$$\xi \sin\alpha = r \sin\beta,$$

$$\xi \cos\alpha + r\cos\beta = a, \qquad \rightarrow \qquad \xi = \frac{a - r\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Daraus folgt

$$r\sin\beta = (a - r\cos\beta)\tan\alpha,$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r\sin\beta}{a - r\cos\beta}\right).$$



$(a = 3r)$

Aufgabe 3.6

Aus der ersten Gleichung des Gleichungssystems

$$a_0 + a_1 x_A + a_2 {x_A}^2 = y_A,$$

$$a_0 + a_1 x_B + a_2 {x_B}^2 = y_B,$$

$$a_0 + a_1 x_C + a_2 {x_C}^2 = y_C,$$

erhalten wir zunächst

$$a_0 = y_A - a_1 x_A - a_2 {x_A}^2$$

und damit wird

$$\begin{aligned} a_1(x_B - x_A) + a_2({x_B}^2 - {x_A}^2) &= y_B - y_A, \\ a_1(x_C - x_A) + a_2({x_C}^2 - {x_A}^2) &= y_C - y_A, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a_1 + a_2(x_B + x_A) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \\ a_1 + a_2(x_C + x_A) &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a_2(x_B + x_A)$$

und schließlich

$$a_2 = \frac{1}{x_C - x_B}\left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right).$$

Ist insbesondere $A{:}(-L, 3L)$, $B{:}(2L, L)$, $C{:}(4L, 2L)$, so wird

$$a_2 = \frac{1}{2L}\left(\frac{-1}{5} - \frac{-2}{3}\right) = \frac{7}{30L}, \qquad a_1 = \frac{-2}{3} - \frac{7}{30} = -\frac{9}{10}, \qquad a_0 = 3L - \frac{9}{10}L - \frac{7}{30}L = \frac{28}{15}L,$$

$$y(x) = L\left(\frac{28}{15} - \frac{9}{10}\frac{x}{L} + \frac{7}{30}\frac{x^2}{L^2}\right).$$

Aufgabe 3.7

Koordinatentransformation:

$$\xi = x - x_A, \qquad \eta = y - y_A.$$

Darstellung der Musterparabel im xy-System:

$$y - y_A = \frac{1}{4b}(x - x_A)^2, \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{1}{4b}x^2 - \frac{x_A}{2b}x + y_A + \frac{{x_A}^2}{4b}.$$

Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Parabel:

$$a_2 = \frac{1}{4b}, \qquad a_1 = -\frac{x_A}{2b}, \qquad a_0 = y_A + \frac{{x_A}^2}{4b}.$$

Daraus folgt

$$b = \frac{1}{4a_2}, \qquad x_A = -\frac{a_1}{2a_2}, \qquad y_A = a_0 - \frac{{a_1}^2}{4a_2}.$$

Aufgabe 3.8

$$\pi - \gamma = \pi - 3\alpha \qquad \rightarrow \qquad \gamma = 3\alpha.$$

Gleichung der Geraden durch B und C:

$$y = y_B + \tan\gamma\,(x - x_B),$$
$$x_B = r\cos(2\alpha), \qquad y_B = r\sin(2\alpha);$$
$$y_B + \tan\gamma\,(x_C - x_B) = 0, \qquad \rightarrow \qquad x_C = \frac{\tan\gamma\, x_B - y_B}{\tan\gamma},$$
$$x_C = r\frac{\sin\gamma\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)\cos\gamma}{\sin\gamma} = r\frac{\sin(\gamma - 2\alpha)}{\sin\gamma},$$
$$x_C = r\frac{\sin\alpha}{\sin(3\alpha)}.$$

Aufgabe 3.9

$$x_1 = a\cos\alpha - b\sin\alpha, \qquad y_1 = a\sin\alpha + b\cos\alpha;$$

$$x_2 = x_1 - d\cos(\beta - \alpha) + c\sin(\beta - \alpha),$$
$$y_2 = y_1 + d\sin(\beta - \alpha) + c\cos(\beta - \alpha).$$

Aufgabe 3.10

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \tan\gamma = \frac{b}{a}, \qquad \gamma = \arctan(b\ a),$$
$$x_B = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \gamma), \qquad y_A = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\alpha + \gamma),$$
$$x_S = \frac{x_B}{2}, \qquad y_S = \frac{y_A}{2}.$$
$$x_S{}^2 + y_S{}^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}/2}{2}\right)^2 \qquad \text{Kreis um } (x = 0, y = 0).$$

Der Schwerpunkt S bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}/2$ um den Koordinatenursprung.

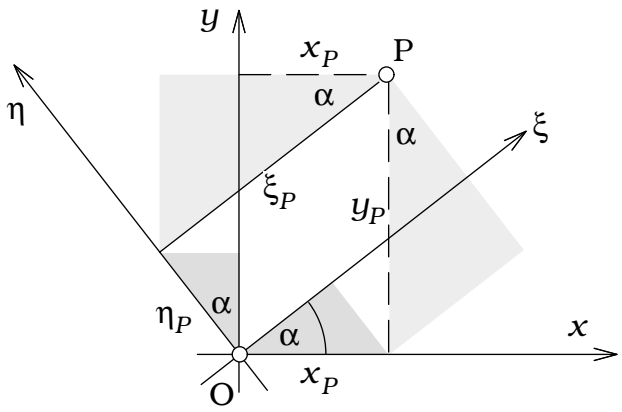
Aufgabe 3.11

$$x_S = r\sin\alpha - r_S\cos\alpha, \qquad y_S = r - r_S\sin\alpha,$$
$$x_B = r(\sin\alpha + \alpha).$$

Aufgabe 3.12

$$\gamma = \arctan\left(\frac{L_S \cos\alpha}{r(1+\cos\alpha)}\right).$$

Aufgabe 3.13



Aus den linken Dreiecksflächen, bei denen ξ_P und η_P Hypotenusen sind, ergibt sich

$$x_P = \xi_P \cos\alpha - \eta_P \sin\alpha,$$
$$y_P = \xi_P \sin\alpha + \eta_P \cos\alpha,$$

und aus den rechten Dreiecksflächen mit x_P und y_P als Hypotenusen folgt

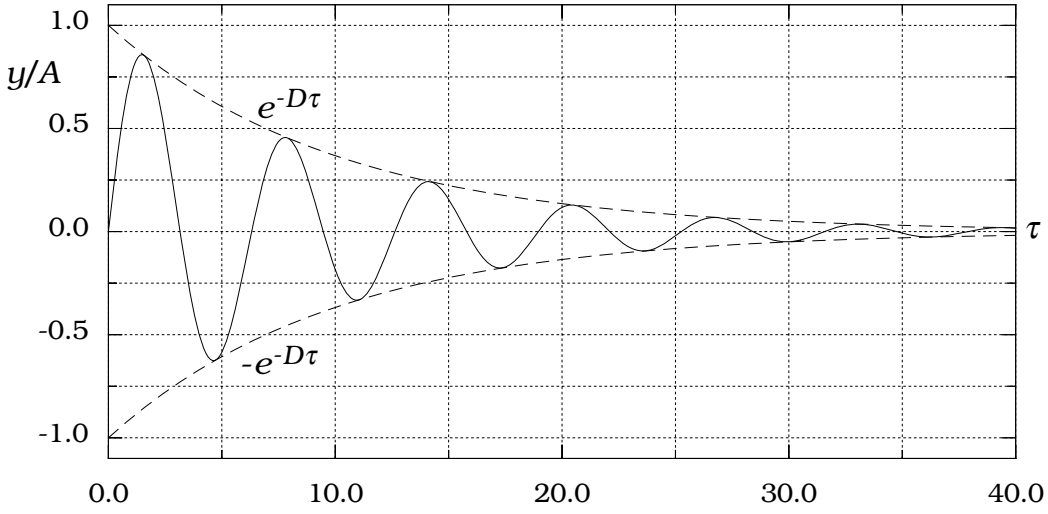
$$\xi_P = x_P \cos\alpha + y_P \sin\alpha,$$
$$\eta_P = -x_P \sin\alpha + y_P \cos\alpha.$$

Man kann das zweite Paar von Transformationsgleichungen auch erhalten, wenn man das erste Paar nach ξ_P und η_P auflöst.

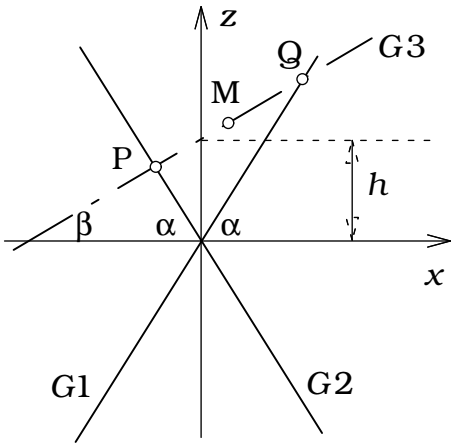
Aufgabe 3.14

$$y(\tau) = Ae^{-D\tau}\sin(\sqrt{1-D^2}\,\tau), \qquad 0 < D < 1, \qquad \tau := \omega_0 t.$$

$$y(t) = \begin{cases} \mathrm{Im}\{Ae^{(-D+i\sqrt{1-D^2})\omega_0 t}\} \\ \mathrm{Re}\{Ae^{(-D\omega_0 t + i(\sqrt{1-D^2}\omega_0 t - \pi/2))}\} \\ \mathrm{Re}\{\boldsymbol{A}e^{(-D+i\sqrt{1-D^2})\omega_0 t}\}, \qquad \boldsymbol{A} := Ae^{-i\pi/2} \end{cases}.$$



Aufgabe 4.1



Geradengleichungen:

$$G1: \quad z = \tan\alpha\, x,$$
$$G2: \quad z = -\tan\alpha\, x,$$
$$G3: \quad z = h + \tan\beta\, x.$$

Berechnung der Koordinaten von P, Q und M:

$$h + \tan\beta\, x_P = -\tan\alpha\, x_P, \quad \rightarrow \quad x_P = -\frac{h}{\tan\alpha + \tan\beta}, \qquad z_P = -\tan\alpha\, x_P.$$

$$h + \tan\beta\, x_Q = \tan\alpha\, x_Q, \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{h}{\tan\alpha - \tan\beta}, \qquad z_Q = \tan\alpha\, x_Q.$$

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta}\right) = h\,\frac{\tan\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta},$$

$$z_M = h + \tan\beta\, x_M = h\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}.$$

Berechnung der Länge der Strecke PQ:

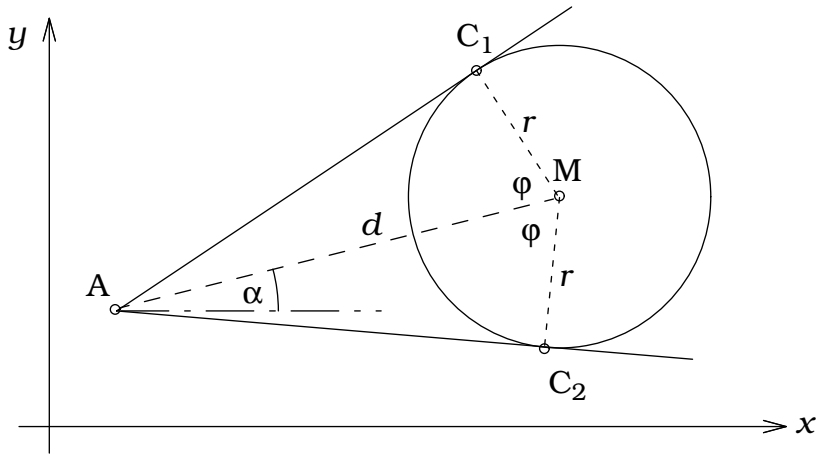
$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (z_Q - z_P)^2},$$

$$x_Q - x_P = h\left(\frac{1}{\tan\alpha - \tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta}\right) = 2h\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta},$$

$$z_Q - z_P = \tan\alpha\,(x_Q + x_P) = 2h\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta},$$

$$\overline{PQ} = 2h\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\beta} = 2h\frac{\tan\alpha}{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)\cos\beta}.$$

Aufgabe 4.2



$$\alpha = \arctan\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}, \qquad d = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}, \qquad \varphi = \arccos(r/d),$$

$$x_{C_1} = x_M - r\cos(\varphi - \alpha), \qquad y_{C_1} = y_M + r\sin(\varphi - \alpha),$$

$$x_{C_2} = x_M - r\cos(\varphi + \alpha), \qquad y_{C_2} = y_M - r\sin(\varphi + \alpha).$$

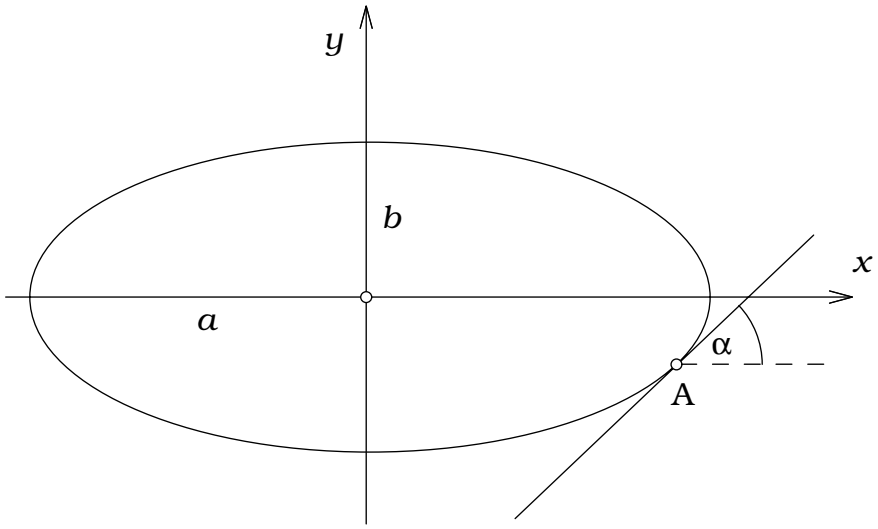
Aufgabe 5.1

Es gilt für die Punkte auf dem unteren Ellipsenbogen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \rightarrow \qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Daraus folgt

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}\frac{x_A}{\sqrt{a^2 - {x_A}^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_A}{y_A}.$$



Die Geradengleichung der Tangente in A

$$y = \tan\alpha(x - x_A) + y_A$$

kann also geschrieben werden

$$y = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_A}{y_A}(x - x_A) + y_A, \qquad \rightarrow \qquad y - y_A + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_A}{y_A}(x - x_A) = 0,$$

$$a^2 y_A(y - y_A) + b^2 x_A(x - x_A) = 0, \qquad \rightarrow \qquad \frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} - \frac{{x_A}^2}{a^2} - \frac{{y_A}^2}{b^2} = 0,$$

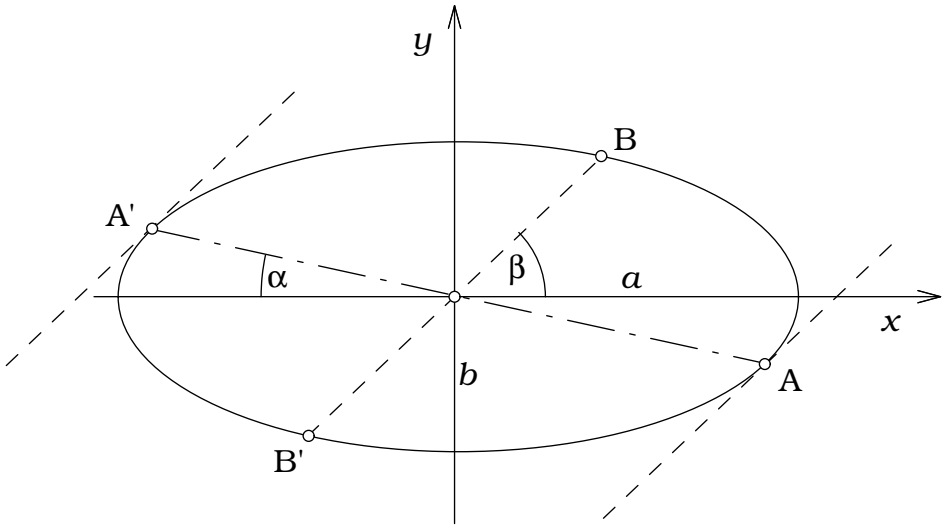
$$\frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} = 1.$$

Die Tangente schneidet die x-Achse und die y-Achse in den Punkten a^2/x_A und b^2/y_A.

Aufgabe 5.2

Für den unteren Ellipsenbogen, auf dem der Punkt A liegt, gilt

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$



Die Gerade durch den Punkt A

$$y = -\tan\alpha\, x$$

liefert im Punkt A die Beziehung

$$y_A = -\tan\alpha\, x_A.$$

Da A auf der Ellipse liegt, gilt auch

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1, \quad \rightarrow \quad \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{\tan^2\alpha\, x_A^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x_A^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2\tan^2\alpha}.$$

Die Tangente im Punkt A ist definitionsgemäß parallel zum Durchmesser BB‘. Also wird

$$y'(x_A) = \frac{b}{a}\frac{x_A}{\sqrt{a^2 - x_A^2}} = \tan\beta, \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2}\frac{x_A^2}{a^2 - x_A^2} = \tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2\tan^2\beta)x_A^2 = a^4\tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2\tan^2\beta)\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2\tan^2\alpha} = a^4\tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2\tan^2\beta)b^2 = a^2\tan^2\beta\,(b^2 + a^2\tan^2\alpha), \quad \rightarrow \quad \frac{b^4}{a^4} = \tan^2\alpha\tan^2\beta,$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Aufgabe 5.3

$$f(x) = \{(1-x^2)^2 + 4D^2x^2\}^{-1/2},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\{(1-x^2)^2 + 4D^2x^2\}^{-3/2}\{2(1-x^2)(-2x) + 8D^2x\},$$

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2-2D^2)}{\{(1-x^2)^2 + 4D^2x^2\}^{3/2}}.$$

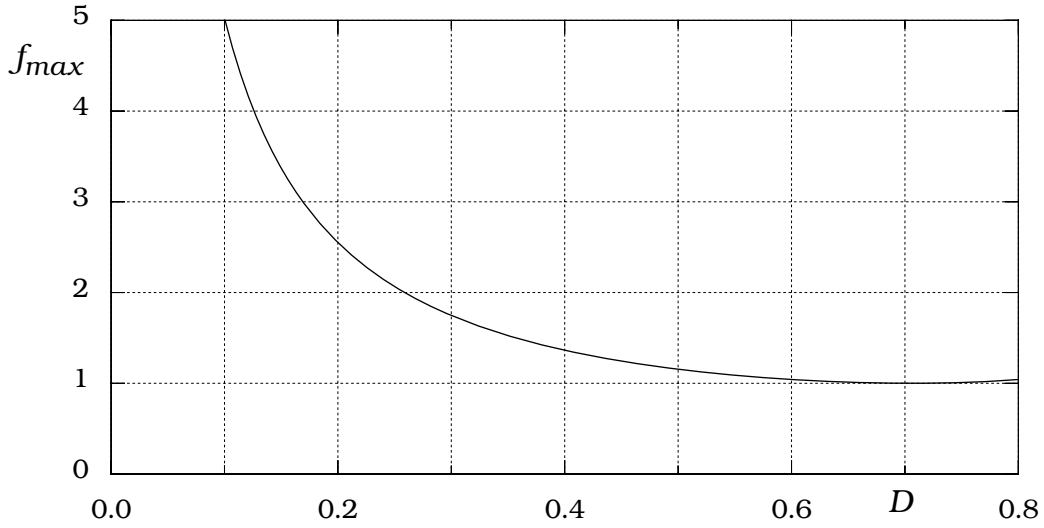
Lage der Extremwerte aus der Forderung $f'(x) = 0$:

$x = 0$ für beliebiges D (Maximalwert für $D \geq 1/\sqrt{2}$)

$x = \sqrt{1-2D^2}$ für beliebiges $D < 1/\sqrt{2}$.

Extremwerte:

$$f_{\max}(D) = \left.\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4D^2x^2}}\right|_{x^2=1-2D^2} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}.$$



Aufgabe 5.4

Für die Wurfweite $x = w$ gilt

$$y(w) = \tan\alpha\, w - \frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}w^2 = 0, \qquad \rightarrow \qquad w = \frac{2{v_0}^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2\sin(2\alpha)}{g}.$$

Mit $\alpha = \pi/4$ ist die Wurfweite am größten.

Für die Koordinate $x = x_h$, bei der

$$y'(x) = \tan\alpha - \frac{g}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} x$$

null wird, erhält man die Wurfhöhe h:

$$x_h = \frac{{v_0}^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin(2\alpha)}{2g},$$

$$h := y(x_h) = \frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

$g := 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ ist die Fallbeschleunigung.

Aufgabe 5.5

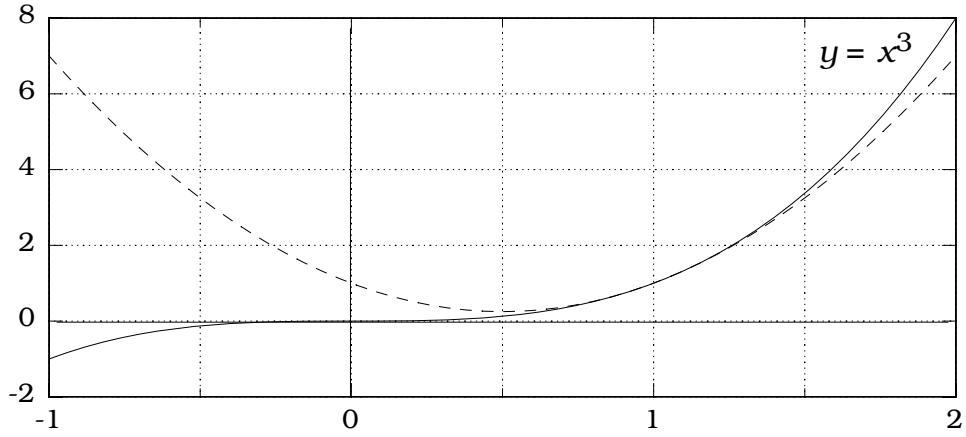
$$\tilde{f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2.$$

$$f(a) = ca^3, \qquad f'(a) = 3ca^2, \qquad f''(a) = 6ca,$$

$$\tilde{f}(x) = ca^3 + 3ca^2(x-a) + 3ca(x-a)^2,$$

$$\tilde{f}(x) = ca^3\{1 - 3\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2}\}.$$

Für $(c = a, a = 1)$ ergibt sich die graphische Darstellung, aus der man die Güte der Approximation erkennen kann.



Aufgabe 5.6

$$\tan\varphi = \frac{v_0 t}{h}, \qquad \varphi = \arctan(v_0\, t/h);$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\arctan(v_0\, t/h) = \frac{1}{1+(v_0\, t/h)^2}\,\frac{v_0}{h} = \frac{v_0 h}{h^2+(v_0 t)^2}.$$

Aufgabe 6.1

Wir berechnen die Fläche unter dem Ellipsenbogen im 1. Quadranten:

$$\frac{A}{4} = \int_0^a b\sqrt{1-(x/a)^2}\,dx.$$

Mit der Variablentransformation

$$\frac{x}{a} = \sin\varphi, \qquad dx = a\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$x = 0 \;\;\rightarrow\;\; \varphi = 0, \qquad x = a \;\;\rightarrow\;\; \varphi = \pi/2,$$

erhalten wir

$$\frac{A}{4} = ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\, d\varphi,$$

und mit

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\{1+\cos(2\varphi)\}$$

$$\frac{A}{4} = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\{1+\cos(2\varphi)\}\,d\varphi = \frac{ab}{2}\{\varphi+\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}, \qquad A = \pi ab.$$

Aufgabe 6.2

$$J(t) := \int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\omega(t-\tau))d\tau.$$

$$\sin(\Omega\tau)\sin(\omega(t-\tau)) = \sin(\Omega\tau)\{\sin(\omega t)\cos(\omega\tau)-\cos(\omega t)\sin(\omega\tau)\},$$

$$J(t) = \sin(\omega t)\int_0^t \sin(\Omega\tau)\cos(\omega\tau)d\tau - \cos(\omega t)\int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\omega\tau)d\tau,$$

$$\sin(\Omega\tau)\cos(\omega\tau) = \frac{1}{2}\{\sin((\Omega-\omega)\tau)+\sin((\Omega+\omega)\tau)\},$$

$$\sin(\Omega\tau)\sin(\omega\tau) = \frac{1}{2}\{\cos((\Omega-\omega)\tau)-\cos((\Omega+\omega)\tau)\},$$

$$\int_0^t \sin(\Omega\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{2}\{-\frac{\cos((\Omega-\omega)t)}{\Omega-\omega} - \frac{\cos((\Omega+\omega)t)}{\Omega+\omega} + \frac{1}{\Omega-\omega} + \frac{1}{\Omega+\omega}\},$$

$$\int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{2}\{\frac{\sin((\Omega-\omega)t)}{\Omega-\omega} - \frac{\sin((\Omega+\omega)t)}{\Omega+\omega}\},$$

$$J(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega-\omega}\{\sin(\omega t) - \sin(\omega t)\cos((\Omega-\omega)t) - \cos(\omega t)\sin((\Omega-\omega)t)\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega+\omega}\{\sin(\omega t) - \sin(\omega t)\cos((\Omega+\omega)t) + \cos(\omega t)\sin((\Omega+\omega)t)\},$$

$$J(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega-\omega}\{\sin(\omega t) - \sin(\Omega t)\} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Omega+\omega}\{\sin(\omega t) + \sin(\Omega t)\},$$

$$J(t) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\Omega-\omega} + \frac{1}{\Omega+\omega})\sin(\omega t) + \frac{1}{2}(\frac{1}{\Omega+\omega} - \frac{1}{\Omega-\omega})\sin(\Omega t),$$

$$J(t) = \frac{1}{\Omega^2-\omega^2}\{\Omega\sin(\omega t) - \omega\sin(\Omega t)\}.$$

Aufgabe 6.3

$$J(t) := \int_0^t \sin(\Omega\tau)\sin(\Omega(t-\tau))d\tau.$$

$$\sin(\Omega\tau)\sin(\Omega(t-\tau)) = \sin(\Omega t)\sin(\Omega\tau)\cos(\Omega\tau) - \cos(\Omega t)\sin^2(\Omega\tau),$$

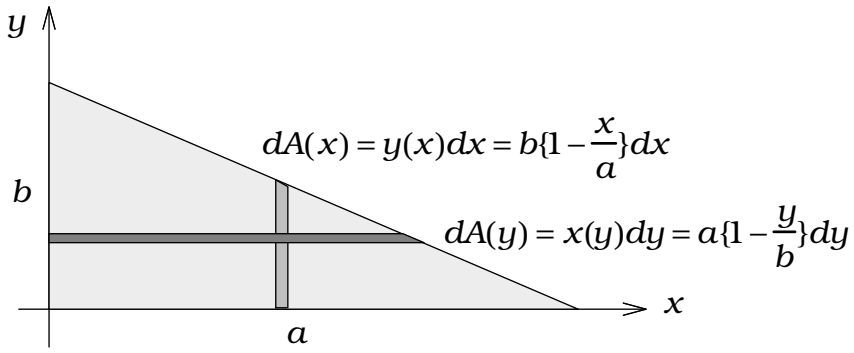
$$\int_0^t \sin(\Omega\tau)\cos(\Omega\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(2\Omega\tau)d\tau = \frac{1}{2}\{-\frac{\cos(2\Omega t)}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega}\},$$

$$\int_0^t \sin^2(\Omega\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (1-\cos(2\Omega\tau))d\tau = \frac{1}{2}\{t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega}\},$$

$$J(t) = \sin(\Omega t)\{\frac{1}{4\Omega} - \frac{\cos(2\Omega t)}{4\Omega}\} - \cos(\Omega t)\{\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega}\},$$

$$J(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{2\Omega} - \frac{t}{2}\cos(\Omega t).$$

Aufgabe 6.4

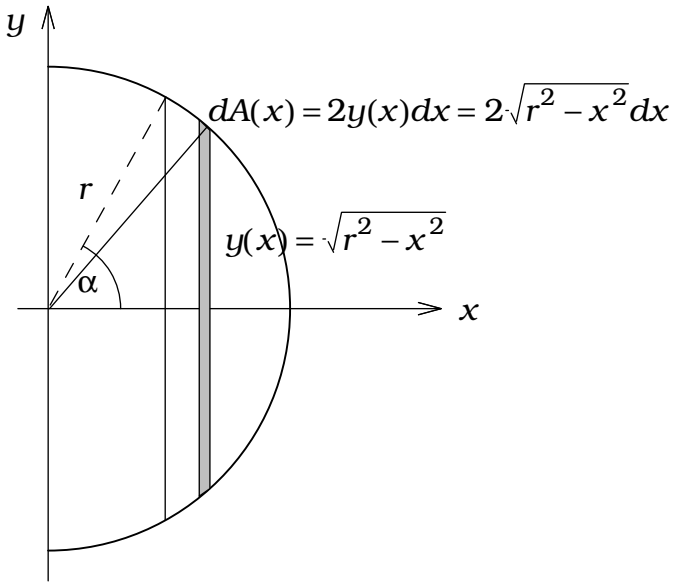


$$A = \frac{1}{2}ab,$$

$$x_S = \frac{2}{ab}\int_0^a x dA(x) = \frac{2}{ab}\int_0^a b(x - \frac{x^2}{a})dx = \frac{2}{a}(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a})\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a}{3}.$$

$$y_S = \frac{2}{ab}\int_0^b y dA(y) = \frac{2}{ab}\int_0^a a(y - \frac{y^2}{b})dy = \frac{2}{b}(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b})\Big|_{y=0}^{y=b} = \frac{b}{3}.$$

Aufgabe 6.5



$$A = A_{Kreissektor} - A_{Dreieck} = \frac{\pi r^2}{2\pi}2\alpha - \frac{1}{2}r\cos\alpha\, 2r\sin\alpha,$$

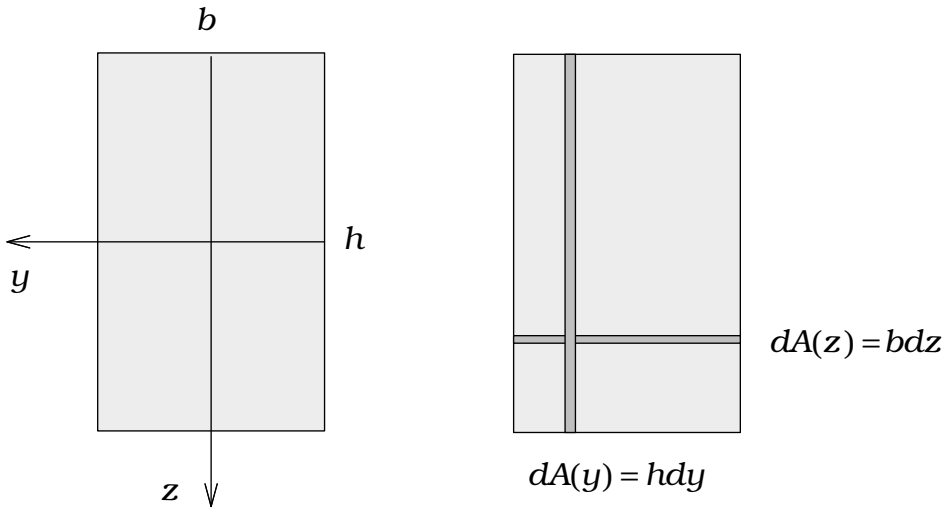
$$A = \frac{r^2}{2}\{2\alpha - \sin(2\alpha)\}.$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int_A x dA = \frac{1}{A}\int_{r\cos\alpha}^{r} x dA(x) = \frac{1}{A}\int_{r\cos\alpha}^{r} 2x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

$$x_S = -\frac{2}{3A}\int_{r\cos\alpha}^{r} \frac{d}{dx}(r^2 - x^2)^{3/2} dx = -\frac{2}{3A}(r^2 - x^2)^{3/2}\Big|_{x=r\cos\alpha}^{x=r},$$

$$x_S = \frac{2r^3}{3A}\sin^3\alpha, \qquad x_S = \frac{2}{3}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}r.$$

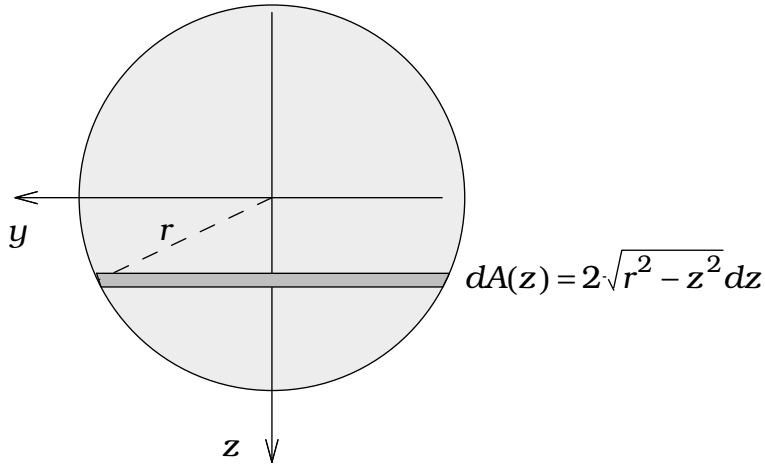
Aufgabe 6.6



$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dA(z) = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b\frac{z^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dA(y) = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 h dy = h\frac{y^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}.$$

Aufgabe 6.7



$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-r}^{r} z^2 dA(z) = 2\int_{-r}^{r} z^2 \sqrt{r^2 - z^2}\,dz,$$

$$z = r\sin\varphi, \qquad dz = r\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$z = -r \;\rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{2}, \qquad z = r \;\rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$I_y = 2r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{r^4}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2\varphi)\, d\varphi,$$

$$2\varphi = \psi, \qquad d\varphi = \frac{1}{2}d\psi,$$

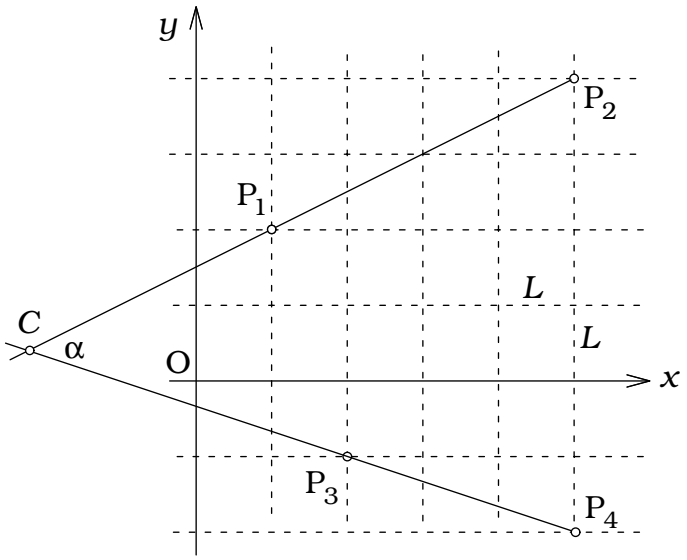
$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \psi = -\pi, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \psi = \pi,$$

$$I_y = \frac{r^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\psi\, d\psi = \frac{r^4}{8}\int_{-\pi}^{\pi} \{1 - \cos(2\psi)\}\, d\psi = \frac{r^4}{8}\{\psi - \frac{1}{2}\sin(2\psi)\}\Big|_{\psi=-\pi}^{\psi=\pi},$$

$$I_y = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Aus Symmetriegründen ist $I_z = I_y$.

Aufgabe 7.1



$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 5L \\ 4L \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 5L \\ -2L \end{bmatrix}.$$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 4L \\ 2L \end{bmatrix}, \qquad \vec{P_3P_4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 3L \\ -L \end{bmatrix},$$

$$\left|\vec{P_1P_2}\right| = \sqrt{20}L, \qquad \left|\vec{P_3P_4}\right| = \sqrt{10}L,$$

$$\vec{P_1P_2} =: \left|\vec{P_1P_2}\right|\vec{e}_1, \qquad \vec{P_3P_4} =: \left|\vec{P_3P_4}\right|\vec{e}_2, \qquad \rightarrow \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\cos\alpha = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 45^{\circ}.$$

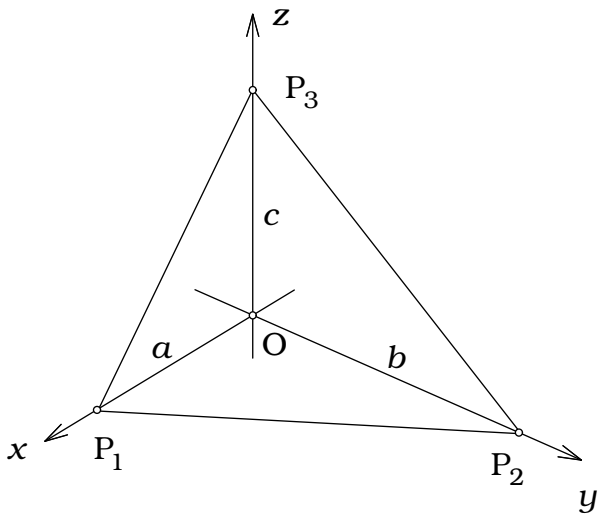
$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_C + \lambda_1\vec{e}_1 &= \vec{r}_1, \\ \vec{r}_C + \lambda_2\vec{e}_2 &= \vec{r}_3, \end{aligned}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1\vec{e}_1 - \lambda_2\vec{e}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \qquad \rightarrow \qquad \frac{\lambda_1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ 3L \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda_1 - 3\sqrt{2}\lambda_2 &= -\sqrt{20}L, \\ 2\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2 &= 3\sqrt{20}L, \end{aligned}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{8}{\sqrt{5}}L = 3{,}58L \qquad \lambda_2 = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}}L = 4{,}43L.$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_1 - \lambda_1\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix} - \frac{8}{\sqrt{5}}L\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3{,}2L \\ 1{,}6L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}2L \\ 0{,}4L \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_3 - \lambda_2 \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix} - \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}} L \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4{,}2L \\ -1{,}4L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}2L \\ 0{,}4L \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.2



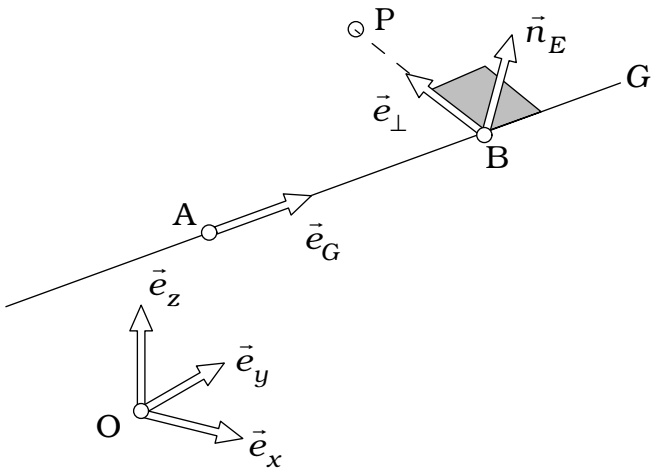
$$A\vec{n} = \frac{1}{2} \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \frac{1}{2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix}.$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}. \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}} \begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix}.$$

$$\vec{v} \cdot \vec{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0, \qquad \vec{v} \cdot \vec{P_1P_3} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0,$$

$$\vec{v} \perp \vec{P_1P_2} \quad \text{und} \quad \vec{v} \perp \vec{P_1P_3} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v} \perp \text{Ebene E}.$$

Aufgabe 7.3



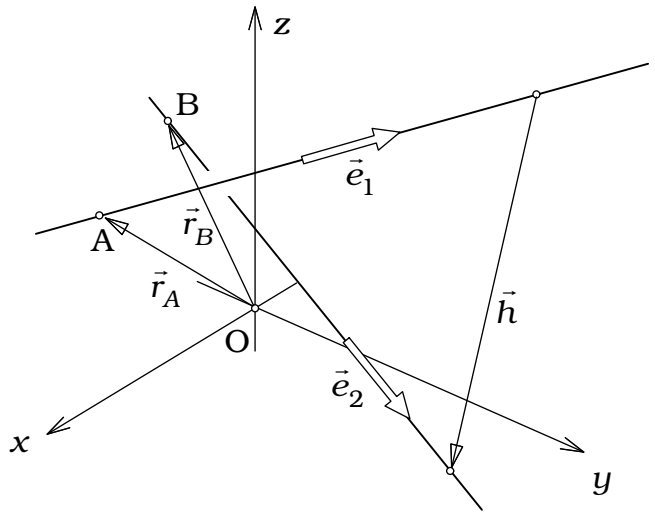
$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}, \qquad \vec{AB} = (\vec{AP} \cdot \vec{e}_G)\vec{e}_G, \qquad \vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB},$$

$$d_P = |\vec{BP}|, \qquad \vec{e}_\perp = \frac{\vec{BP}}{d_P}, \qquad \vec{n}_E = \vec{e}_G \times \vec{e}_\perp, \qquad d_E = \vec{n}_E \cdot \vec{OA},$$

$$(a\vec{e}_x) \cdot \vec{n}_E = d_E, \qquad (b\vec{e}_y) \cdot \vec{n}_E = d_E, \qquad (c\vec{e}_z) \cdot \vec{n}_E = d_E,$$

$$a = \frac{d_E}{n_{Ex}}, \qquad b = \frac{d_E}{n_{Ey}}, \qquad c = \frac{d_E}{n_{Ez}}.$$

Aufgabe 7.4



Verbindungsvektor von zwei beliebigen Punkten auf den beiden Geraden:

$$\vec{h}(\lambda_1,\lambda_2) := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_B - \vec{r}_A + \lambda_2\vec{e}_2 - \lambda_1\vec{e}_1.$$

Bedingungen für den minimalen Abstand:

$$\frac{\partial(\vec{h}\cdot\vec{h})}{\partial\lambda_1} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\vec{h}\cdot\frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda_1} = -2\vec{h}\cdot\vec{e}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(\vec{h}\cdot\vec{h})}{\partial\lambda_2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\vec{h}\cdot\frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda_2} = 2\vec{h}\cdot\vec{e}_2 = 0,$$

Der kürzeste Verbindungsvektor der beiden Geraden ist also zu beiden Geraden orthogonal. Dieser Lotvektor wird durch die Parameter λ_{1L} und λ_{2L} beschrieben, die folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$\vec{h}\cdot\vec{e}_1 = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)\cdot\vec{e}_1 + \lambda_{2L}(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1) - \lambda_{1L} = 0,$$

$$\vec{h}\cdot\vec{e}_2 = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)\cdot\vec{e}_2 + \lambda_{2L} - \lambda_{1L}(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) = 0,$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 =: c, \qquad (\vec{r}_A - \vec{r}_B)\cdot\vec{e}_1 =: b_1, \qquad (\vec{r}_A - \vec{r}_B)\cdot\vec{e}_2 =: b_2,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2L}c - \lambda_{1L} &= b_1, \\ \lambda_{2L} - \lambda_{1L}c &= b_2, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1L} = \frac{cb_2 - b_1}{1-c^2}, \quad \lambda_{2L} = \frac{b_2 - cb_1}{1-c^2}.$$

Abstand der Geraden:

$$h = \left|\vec{r}_B - \vec{r}_A + \lambda_{2L}\vec{e}_2 - \lambda_{1L}\vec{e}_1\right|.$$

Aufgabe 7.5

Mit den zu den Ebenen jeweils orthogonalen Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/a_1 \\ 1/b_1 \\ 1/c_1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/a_2 \\ 1/b_2 \\ 1/c_2 \end{bmatrix},$$

erhalten wir den Richtungsvektor

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/a_1 \\ 1/b_1 \\ 1/c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/a_2 \\ 1/b_2 \\ 1/c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(b_1c_2) - 1/(b_2c_1) \\ 1/(c_1a_2) - 1/(c_2a_1) \\ 1/(a_1b_2) - 1/(a_2b_1) \end{bmatrix}$$

der Schnittgeraden.

Die Koordinaten des in der xy-Ebene liegenden Punktes P:$(x_P, y_P, z_P = 0)$ auf der Schnittgeraden erhalten wir aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{x_P}{a_1} + \frac{y_P}{b_1} = 1, \\ &\frac{x_P}{a_2} + \frac{y_P}{b_2} = 1, \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad x_P = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{b_1 a_2 - b_2 a_1}, \quad y_P = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad z_P = 0.$$

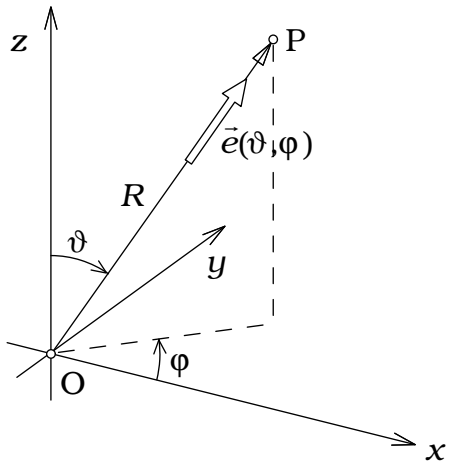
Vektorielle Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{r} = \vec{r}_P + \lambda \vec{w}.$$

Aufgabe 7.6

$$\vec{\mathrm{OP}} = R\vec{e}(\vartheta, \varphi) = R\{\sin\vartheta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\vartheta\vec{e}_z\}$$

$$\mathrm{P}_1{:}(\vartheta_1, \varphi_1) \;\rightarrow\; \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sin\vartheta_1\cos\varphi_1 \\ \sin\vartheta_1\sin\varphi_1 \\ \cos\vartheta_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{P}_2{:}(\vartheta_2, \varphi_2) \;\rightarrow\; \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin\vartheta_2\cos\varphi_2 \\ \sin\vartheta_2\sin\varphi_2 \\ \cos\vartheta_2 \end{bmatrix}.$$



Die beiden Ortsvektoren spannen eine Ebene auf, in der die beiden Punkte durch einen Kreisbogen mit dem Radius R verbunden sind. Ist α der Winkel zwischen den beiden Ortsvektoren, so wird αR der Abstand der Punkte auf der Kugel.

$$\alpha = \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2),$$

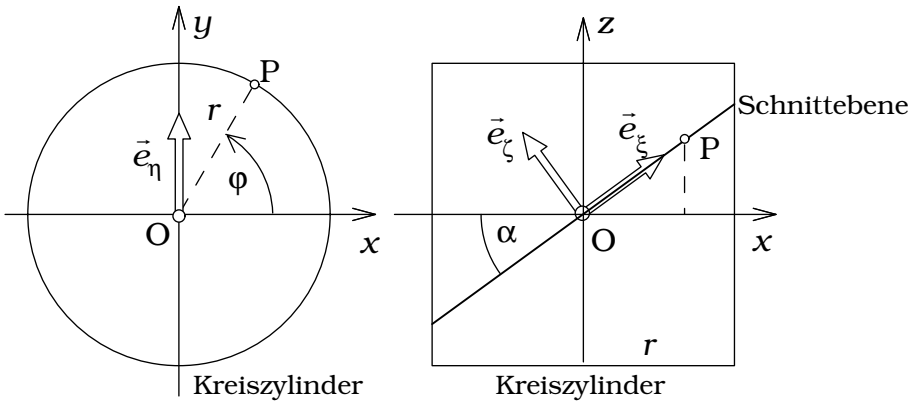
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \sin\vartheta_1\cos\varphi_1\sin\vartheta_2\cos\varphi_2 + \sin\vartheta_1\sin\varphi_1\sin\vartheta_2\sin\varphi_2 + \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2,$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2,$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2.$$

$$a = R \arccos(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2).$$

Aufgabe 7.7



Ortsvektor des Punktes P auf der Schnittkurve, also auf dem Zylinder und in der geneigten $\xi\eta$-Ebene:

$$\vec{OP} = r\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\varphi\,\vec{e}_y + z(\varphi)\vec{e}_z,$$

$$\frac{z(\varphi)}{x(\varphi)} = \tan\alpha, \qquad \rightarrow \qquad z(\varphi) = r\tan\alpha\cos\varphi,$$

$$\vec{OP} = r(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y + \tan\alpha\cos\varphi\vec{e}_z) = r\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \tan\alpha\cos\varphi\end{bmatrix}.$$

$$\vec{OP} = \xi_P\,\vec{e}_\xi + \eta_P\,\vec{e}_\eta; \qquad \vec{e}_\xi = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z = \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ \sin\alpha\end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_\eta = \vec{e}_y = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix};$$

$$\xi_P = \vec{OP}\cdot\vec{e}_\xi = r(\cos\varphi\cos\alpha + \tan\alpha\cos\varphi\sin\alpha) = r\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha},$$

$$\eta_P = \vec{OP}\cdot\vec{e}_\eta = r\sin\varphi,$$

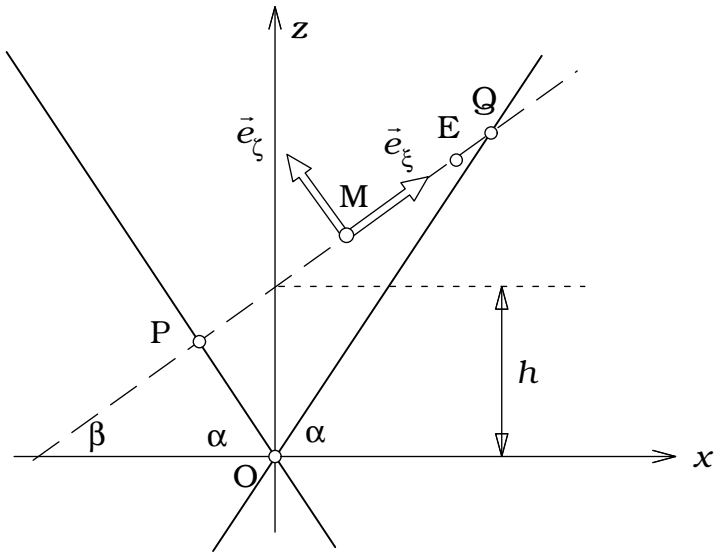
$$\frac{\xi_P}{r/\cos\alpha} = \cos\varphi, \qquad \frac{\eta_P}{r} = \sin\varphi, \qquad \rightarrow \qquad \frac{{\xi_P}^2}{(r/\cos\alpha)^2} + \frac{{\eta_P}^2}{r^2} = 1.$$

Die Schnittkurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen $(r/\cos\alpha)$ auf der ξ-Achse und r auf der η-Achse.

Aufgabe 7.8

Der Schnittkurvenpunkt E liegt auf dem Kreiskegel und hat deshalb den Ortsvektor

$$\vec{OE} = \begin{bmatrix} r(z_E)\cos\varphi \\ r(z_E)\sin\varphi \\ z_E \end{bmatrix}, \qquad \frac{z_E}{r(z_E)} = \tan\alpha, \qquad \vec{OE} = z_E \begin{bmatrix} \cos\varphi/\tan\alpha \\ \sin\varphi/\tan\alpha \\ 1 \end{bmatrix};$$



E liegt aber auch auf der Schnittebene. Deshalb gilt

$$z_E = h + \tan\beta\, x_E = h + \tan\beta\, r(z_E)\cos\varphi = h + z_E \frac{\tan\beta\cos\varphi}{\tan\alpha},$$

$$z_E = h\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha - \tan\beta\cos\varphi}.$$

Also wird

$$\vec{OE} = \frac{h}{\tan\alpha - \tan\beta\cos\varphi}\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \tan\alpha \end{bmatrix}.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erhalten wir die Ortsvektoren zu den Endpunkten der Strecke PQ:

$$\vec{OQ} = \frac{h}{\tan\alpha - \tan\beta}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{bmatrix}, \qquad \vec{OP} = \frac{h}{\tan\alpha + \tan\beta}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{h}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}\left((\tan\alpha + \tan\beta)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{bmatrix} - (\tan\alpha - \tan\beta)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{bmatrix}\right),$$

$$\vec{PQ} = \frac{2h\tan\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\beta \end{bmatrix},$$

Der Ortsvektor zum Mittelpunkt M der Strecke PQ in der xz-Ebene lautet:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{PQ} = \frac{h}{\tan\alpha + \tan\beta}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan\alpha \end{bmatrix} + \frac{h\tan\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan\beta \end{bmatrix},$$

$$\vec{OM} = \frac{h}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}\begin{bmatrix} \tan\beta \\ 0 \\ \tan^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ 0 \\ z_M \end{bmatrix}.$$

Aus dem Ortsvektor eines beliebigen Punktes K auf dem Kreiskegel

$$\vec{OK} = \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_K)\cos\varphi \\ r(z_K)\sin\varphi \\ z_K \end{bmatrix}, \qquad \frac{z_K}{r(z_K)} = \tan\alpha,$$

folgt

$$x_K{}^2 + y_K{}^2 = r^2(z_K), \qquad \rightarrow \qquad x_K{}^2 + y_K{}^2 = \frac{z_K{}^2}{\tan^2\alpha}.$$

Wir transformieren diese Gleichung in das ξ,η,ζ-Koordinatensystem im Punkt M mit den Basisvektoren

$$\vec{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{e}_\zeta = \begin{bmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Die entsprechenden Transformationsgesetze lauten.

$$\begin{aligned} x_K &= x_M + \xi_K \cos\beta - \zeta_K \sin\beta, \\ y_K &= \eta_K, \\ z_K &= z_M + \xi_K \sin\beta + \zeta_K \cos\beta. \end{aligned}$$

Für einen Punkt E auf der Schnittkurve in der $\xi\eta$-Ebene gilt dann insbesondere $\zeta_K = \zeta_E = 0$, also

$$x_E{}^2 + y_E{}^2 = \frac{z_E{}^2}{\tan^2\alpha}, \qquad \begin{aligned} x_E &= x_M + \xi_E \cos\beta, \\ y_E &= \eta_E, \\ z_E &= z_M + \xi_E \sin\beta. \end{aligned}$$

$$\tan^2\alpha\{(x_M + \xi_E\cos\beta)^2 + \eta_E{}^2\} = (z_M + \xi_E \sin\beta)^2,$$

$$\xi_E{}^2(\tan^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\xi_E(x_M \tan^2\alpha\cos\beta - z_M \sin\beta) + \tan^2\alpha\ \eta_E{}^2 = z_M{}^2 - \tan^2\alpha\ x_M{}^2.$$

Mit dem oben berechneten Ortsvektor

$$\vec{OM} = \frac{h}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta} \begin{bmatrix} \tan\beta \\ 0 \\ \tan^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ 0 \\ z_M \end{bmatrix},$$

erhalten wir

$$x_M \tan^2\alpha\cos\beta - z_M \sin\beta = \frac{h}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}(\tan\beta\tan^2\alpha\cos\beta - \tan^2\alpha\sin\beta) = 0,$$

$$z_M{}^2 - \tan^2\alpha\, x_M{}^2 = \frac{h^2}{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)^2}(\tan^4\alpha - \tan^2\alpha\tan^2\beta) = \frac{h^2\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta},$$

und schließlich

$$\frac{\cos^2\beta(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)^2}{h^2\tan^2\alpha}\xi_E{}^2 + \frac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{h^2}\eta_E{}^2 = 1.$$

Die Schnittkurve ist also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b:

$$\frac{\xi_E{}^2}{a^2} + \frac{\eta_E{}^2}{b^2} = 1, \qquad a = h\frac{\tan\alpha}{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)\cos\beta}, \qquad b = \frac{h}{\sqrt{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}}.$$