

Gleichmäßig Beschleunigte Bewegung $s(t) = r_0 + v_0 * t + a_0 * \frac{t^2}{2}$ $v(t) = v_0 + a_0 * t$

Wurfparabel durch Betrachtung der x(t)- und y(t)-Komponenten. Eine Umstellen nach t und in die Andere einsetzen ergibt y(x) oder x(y) und damit Flugbahn. Weite ist die zweite Nullstelle, Höhe erste Ableitung Null setzen (lokales Maximum)

Kreisbewegung

Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

Bahnbeschleunigung $\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$

Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t) \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Tangential- u. Radial-Beschleunigung

$$\vec{a} = \overbrace{(\vec{\alpha} \times \vec{r})}^{\text{Tangential } a_r} + \overbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}^{\text{Radial } a_N \text{ in Richtung } -\vec{r}_0 / \text{Zentripetalbeschl.}}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 * r \quad (\text{wenn } \vec{\omega} \perp \vec{r})$$

Keplersches Gesetz $\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$ $a = \text{Abstand Planet - Sonne}$
 $T = \text{Umlaufzeiten}$

Gravitation $\vec{F}_G = -G * \frac{m * M}{r^2} * \vec{r}_0$ $G \equiv \gamma$ G ist eine **Naturkonstante**

Gravitationspotential $\varphi_G(r) = -\mu * M * \frac{1}{r} \rightarrow \varphi(\infty) = 0$

Coulombkraft $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q * Q}{r^2} * \vec{r}_0$ Federkraft $\vec{F}_R = -k * \vec{x}$

Lorenzkraft $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ $B = \text{Magnetische Induktion}$

Haft- ' / Gleit- " / Roll-''' Reibung (unabh. v. d. Auflagefläche)

$$\vec{F}_R = \overbrace{-\mu}^{\mu' \text{ bis } \mu''} * |\vec{F}_N| * \vec{F}_0 \quad \text{Haftreibung} > \text{Gleitreibung} \gg \text{Rollreibung}$$

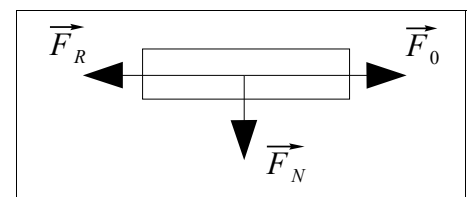
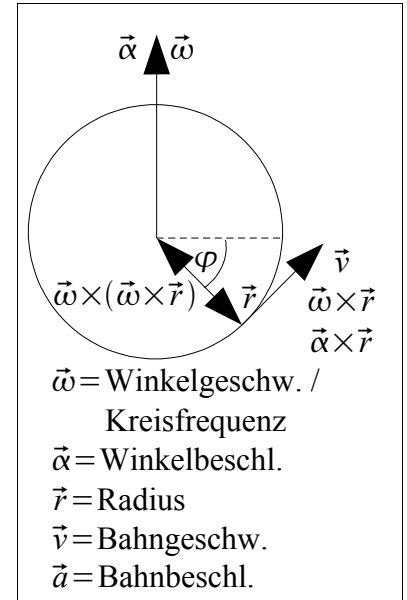
Harmonischer Oszillator (Bsp: Feder)

$$m * \frac{d^2 x}{dt^2} + k * x = 0 \quad \text{Lösung der DGL: } x(t) = x_0 * \sin(\omega * t + \varphi_0) \text{ mit } \omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Viskose Reibungskraft nach Stokes $\vec{F}_R = -K \eta * \vec{v}$ $K = \text{Körperform Koeffizient, z.B. } K_{\text{Kugel}} = 6\pi R$
 $\eta = \text{Viskositätskoeffizient des Mediums}$

Viskose Reibung v_0 ist Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$ (ähnelt dem Freien Fall mit Reibung)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K * \eta}{m} * \vec{v} \equiv -\frac{\vec{v}}{\tau} \quad \text{DGL Lösung: } \vec{v} = \vec{v}_0 * e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow (\text{Integration über } t) \vec{x} = \tau * \vec{v}_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Ladung im elektrischen Feld / Ablenkung im Kondensator

$$\vec{F} = \vec{E} * q \text{ also lautet die Bewegungsgleichung } m * \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q * \vec{E}$$

x und y Komponenten trennen, Dauer im E Feld bestimmen (gleichmäßig beschleunigte Bewegung), Zeit bis zum Auftreffen (gleichmäßige Bewegung)

Ablenkung von Ladungen im Magnetfeld: gekoppelte DGL, Kreisbahn, Räumlich Spiralbewegung um die Richtung des Magnetfeldes herum.

Zentrifugalkraft und Kreisbahn

Wenn die Zentrifugalkraft (nach außen) $\overset{\text{Zentrifugal}}{\vec{F}_Z} = m * \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ im Betrag $\overset{\text{Zentripetal}}{\vec{F}_{ZP}} = m * \omega^2 * r$ gleich groß der Gravitationskraft ist, kompensieren sich die beiden Kräfte – Folge: Stabile Kreisbahn (Satellit oder Elektron)

Corioliskraft (wirkt entgegengesetzt der Bewegung des rotierenden Systems) $\vec{a}_{\text{Coriolis}} = -2 * \vec{\omega} \times \vec{v}$

Rotierende Bezugssysteme $\vec{a}_{Tr} = \underbrace{-2(\vec{\omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolisbeschl. nur bei Bewegung (v) im rot. Bezugssystem auf}} + \underbrace{-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}}$

Lorenztransformation → Konstante Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen

Bewegung entlang der z- Achse

$$x' = x, y' = y, z' = \frac{z - v_z * t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, t' = \frac{t - (v_z / c^2) * z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

Folgerungen:

Lorenz Kontraktion: Körper erscheinen vom bewegten Bezugssystem aus betrachtet kürzer als im Ruhesystem ($L' < L$)

Lorenz Dilatation: Prozesse, die sich in einem bestimmten System abspielen, laufen von einem dagegen bewegten System aus langsamer ab. ($T' > T$)

Träge Masse eines Körpers erfährt eine relativistische Korrektur.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad m_0 \text{ heisst Ruhemasse} \quad \text{Weitere Bezeichnungen: } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Arbeit: Integral über die Kraft (Arbeit = Kraft entlang eines Weges)

Konservative Kraft: Arbeit → Energie; Umwandelbar wieder in Arbeit

Wechsel Wirkung	Kraft	Arbeit	Konservativ	Energie
Gravitation	$-\gamma * \frac{m * M}{r^2} * \vec{r}_0$	$\gamma m M (\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$	ja	$-\gamma m M (\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$
Coulomb	$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q * Q}{r^2} * \vec{r}_0$	$-\frac{q * Q}{4 \pi \epsilon_0} (\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$	ja	$\frac{q * Q}{4 \pi \epsilon_0} (\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$
Lorenz	$q(\vec{v} \times \vec{B})$	$q \int (\vec{v} \times \vec{B}) \vec{v} dt = 0$	ja	null
Feder	$-k * x$	$-\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2)$	ja	$\frac{k}{2} (x_B^2 - x_A^2)$
Stokes	$-K \eta * \vec{v}$	$-\frac{m}{2} v_A^2 (1 - e^{-t/\tau})$	nein	nicht def.

$$\vec{ds} \perp \vec{F} \Rightarrow dW = 0 \quad \vec{ds} \parallel \vec{F} \Rightarrow dW = F ds$$

Mathematisches Pendel

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{m}{2} l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$ hergeleitet von $v = l \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ da $\frac{1}{2} m v^2$

Potentielle Energie $E_{pot} = m g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi) \approx m g \cdot l \cdot \frac{\varphi^2}{2}$

hergeleitet von $h = l \cdot (1 - \cos \varphi)$ da $m \cdot g \cdot h$

Daraus folgt eine Bewegungsgleichung über die Potentielle und die Kinetische Energie, deren Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bei Massenverteilung physikalisches Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{d}{\Theta}} \quad \text{mit Gesamt rücktreibendem Drehmoment (D = Richtmoment)}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = m g r \cdot \sin \varphi \equiv D \cdot \sin \varphi$$

$\vec{r}$ Ortsvektor des Schwerpunktes, Drehachse im Koordinatenursprung

Potentielle Energie und Kraft $E_{pot}(x) = - \int F(x) dx$ oder auch umgekehrt $F(x) = - \frac{d E_{pot}(x)}{dx}$ auch

komponentenweise mit Gradienten

Gleichgewichtszustände

1. Stabil: Potentielle Energie hat Minimum
2. Labil: Potentielle Energie hat Maximum
3. Indifferentes: Potentielle Energie hat Wendepunkt

Leistung Momentane Leistung $P = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta t}$ Mittlere Leistg. $\bar{P} = \frac{\delta W}{\delta t}$ Einheit $[P] = \frac{J(oule)}{s} = Watt$

Impulserhaltungssatz: In abgeschlossenen Systemen bleibt der Gesamtimpuls erhalten

Energieerhaltung: Wenn nur konservative Kräfte auf einen Körper wirken, dann bleibt die Summe der kinetischen und potentiellen Energie des Körpers konstant.

Bewegungsgleichung: $\vec{F} - m \cdot \vec{a} = 0$

Zentraler Elastischer Stoß

Zentral: Kugelmitte

Elastische: Impuls und Energieerhaltung gelten gleichzeitig $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$ (gleiche Masse)

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

(ungleiche Masse) Formel ähnelt Transmission (v2) und Reflexions (v1)

Koeffizienten bei Reflexion von Wellen, wobei statt der Massen die Brechungsindexe n verwendet werden.

Rotationsbewegungen

In den Formeln wird anstatt der Masse das **Trägheitsmoment** Θ eingesetzt. $[\Theta] = kg \cdot m^2$

Rotation eines Massenpunktes $\Theta = r^2 \cdot m$ Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$

Drehmoment $\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} = m r^2 \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$ $[M] = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

wobei von F tangentielle Komponente wirkt

Drehimpuls $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \Theta \cdot \vec{\omega}$ $[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

Größe	Translation	Rotation	Kommentar
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	
Impuls / Drehimpuls	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$	$\Theta = r^2 * m$
Kraft / Drehmoment	$\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \Theta \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Bewegungsenergie	$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$	$E_{rot} = \frac{\Theta}{2} \omega^2$	
Arbeit	$W = \int_{S_1}^{S_2} \vec{F} d\vec{s}$	$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi}$	

Massenmittelpunkt: mathematisches gewichtetes Mittel, vektoriell

System aus i Massenpunkten: $\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ Für Kontinuierliche Systeme: $\vec{r}_S = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$

Statisches Gleichgewicht: Das Hebelgesetz $\sum \vec{M}_i = 0$ oder $F_1 * d_1 = F_2 * d_2$ oder $\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$

Berechnung von Trägheitsmomenten

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \Theta = \int_V \rho r^2 dV \quad \text{Integration über ein Volumen eines Körpers}$$

Dichte

Beispiel: Hohlzylinder

$$\Theta = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr * d\varphi * dz = 2\pi * h * \rho * \frac{R_a^4 - R_i^4}{4}$$

Das Volumenelement ist $dV = r * dr * d\varphi * dz$; Volumen $V = \pi(R_a^2 - R_i^2) * h$

Wenn man jetzt die Formel für das Trägheitsmoment mit dem Volumen kombiniert, also durch V teilt, erhält man mit $\Theta = M * \frac{R_a^2 + R_i^2}{2}$ eine Darstellung ohne die Dichte. (3. Binomische Formel rückwärts für die Division der Radien)

$$\Theta_{\text{Vollzylinder}} = M * \frac{R^2}{2} \quad \Theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5} M * R^2 \quad \Theta_{\text{Stab}} = \frac{1}{12} M * L^2$$

Steiner'sche Satz $\Theta = \underbrace{\Theta_S}_{\text{Trägheitsmom. bzgl. Schwerpktachse A}} + \underbrace{M * s^2}_{\text{Trägheitsmom. d. Rotation d. Schwerpktes um A' (s: Abstand d. Achsen A und A', M: Gesamtmasse)}}$

(findet Anwendung bei Drehung um eine Achse, die nicht durch den Schwerpunkt geht)

Drehimpulserhaltung: Bsp: Eisläuferin

In abgeschlossenen Systemen bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

Kreisel kommt hoffentlich nicht dran

Der ungedämpfte harmonische Oszillator

Bsp: Feder

Bewegungsgleichung $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$ Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Eigenfrequenz und } \alpha = \frac{\Delta t}{T_0} \cdot 2\pi$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k x(t)^2 \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad \text{Bei } E_{pot}(x) \text{ einsetzen, bei } E_{kin} x(t) \text{ 1. Ableiten und einsetzen}$$

Energiebetrachtung

in die Formeln für den ungedämpften Oszillator $x(t)$ den E Term einsetzen und dann die Energieformel aufstellen.

Relative Energieabnahme pro Periode T: $\frac{dE}{dt} \approx -2\gamma \cdot E = \left[\frac{\Delta E}{E} \right]_T$ über eine Periode

$$\text{Güte (Q)} \quad \frac{2\pi}{Q} = \left[\frac{\Delta E}{E} \right]_T \approx 2\gamma \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (\text{bei kleiner Dämpfung!})$$

Der gedämpfte harmonische Oszillator

Zusätzlich Stokes'sche Reibung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit } \gamma = \frac{K\eta}{2m} \text{ und } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Lösungsansatz: $x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda t}$ Nullstellen(!) $\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$x = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{und } \Omega = j \cdot \omega = j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{wobei } \omega \text{ die}$$

1. Schwingfall $\gamma^2 < \omega_0^2$ Resonanzfrequenz ist

2. Kriechfall des Oszillators

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{gibt } x = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sinh(\Omega t + \alpha)$$

3. Aperiodischer Grenzfall

$$\gamma^2 = \omega_0^2 \quad \text{gibt } x = x_0 \cdot (1 + A \cdot t) \cdot e^{-\gamma t} \quad \text{wobei A Konstante abh. von Anfangsbed.}$$

Analog der elektrische Schwingkreis mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$ als Eigenfrequenz und $2\gamma = \frac{R}{L}$

$$q = q_0 \cdot e^{\lambda t}$$

$$\text{Nullstellen} \quad \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \Omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

gleiche Fälle wie oben, gleiche Formeln, nur R, L, C einsetzen für Gamma Omega etc.

$$\text{Güte (Q)} \quad Q \approx \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{Bei kleiner Dämpfung}$$

Erzwungene Schwingung des Oszillators, es wirke eine periodische Kraft $\vec{F} = \vec{F}_0 * \sin(\omega * t)$

Bewegungsgleichung $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} * \sin(\omega t)$

Lösungsansatz nach Einschwingvorgang $x(t) = x_0(\omega) * \sin(\omega t - \delta)$

Amplitude (Frequenzabhängig) $x_0(\omega) = \frac{F_0}{m} * \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 * \omega^2}}$

Phasenverschiebung $\tan \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Breite der Oszillatorkurve $\Delta\omega \approx 2\gamma$ an der Stelle $\frac{x_{max}}{\sqrt{2}}$ Güte $Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Analog zum Schwingkreis

Überlagerung von Schwingungen Kosinussatz bei gleichen Frequenzen

Schwebungen, wenn die Frequenzen zweier Schwingungen nur wenig voneinander abweichen erhält man eine

Schwebung $x(t) = 2x_{01} * \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} * t\right)}_{\text{Amplitude A(t)}} * \underbrace{\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} * t\right)}_{\sin \omega t}$

Schwebungsfrequenz $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

Gekoppelte Systeme Schwebung: $\omega_- = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ Schwingung: $\omega_+ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Interferenz von Wellen

2 Wellen, gleiche Frequenz, versch. Amplituden und Phasenlagen $A_{1,2} * \sin(\omega t - k z_{1,2})$

Amplitude: $\Psi_0 = \sqrt{\Psi_{01}^2 + \Psi_{02}^2 + 2 * \Psi_{01} * \Psi_{02} * \cos[k(z_2 - z_1)]}$

Phase: $\tan \alpha = \frac{\Psi_{01} * \sin(k z_1) + \Psi_{02} * \sin(k z_2)}{\Psi_{01} * \cos(k z_1) + \Psi_{02} * \cos(k z_2)}$ $n \in \mathbb{N}$; konstruktiv bei $z_2 - z_1 = n * \lambda$
destruktiv bei $z_2 - z_1 = \frac{2n+1}{2} * \lambda$

Wellengleichung

$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} * \frac{d^2 \Psi}{dt^2}$ **Jede Welle muss diese Gleichung erfüllen!**

Longitudinalwellen in Richtung Ausbreitung – Transversalwellen senkrecht zur Ausbreitung

Kreisfrequenz $\frac{2\pi}{T} \equiv \omega$ Wellenzahl $\frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$ Phasengeschwindigkeit $v_{ph} \equiv \frac{dx}{dt}$ $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda * \nu$; Im

Vakuum ist $v_{ph}^{Vakuum} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} = c \approx 3 * 10^8 \frac{m}{s}$

Brechungsindex $n \equiv \frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{\epsilon_r * \mu_r}$

Reflexion und Transmission analog zum Stoß

$r = \frac{m - M}{m + M}$ $t = \frac{2m}{m + M}$ r = Amplitudenreflexionskoeffizient
 t = Amplitudentransmissionskoeffizient

Reflexionsgrad R, Transmissionsgrad D ermitteln durch $|r|^2 = R$ und $R + T = 1$

Wellengruppen

2 cos Anteile mit gleicher Amplitude

$$2\Psi_0 * \cos(\omega_- t - K_- x) * \cos(\omega_+ t - K_+ x) \quad \omega_- = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad \omega_+ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{analog mit } k$$

mit ungefähr gleichen Frequenzen und ungefähr gleichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$\text{Phasengeschwindigkeit } v_{ph} = \frac{\omega_+}{k_+} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit } v_{gr} = \frac{\omega_-}{k_-}$$

Dopplereffekt

Frequenzverschiebung mit zunehmender Geschwindigkeit

$$\text{Ruhender Beobachter: } f = \frac{v_0}{(1 - \frac{v}{v_{ph}})} \quad \text{Bewegter Beobachter } f' = v_0 * (1 + \frac{v}{v_{ph}})$$

Bewegt sich die Quelle mit einer Geschwindigkeit, die größer ist, als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle v_{ph} , so interferieren die Wellenfronten zu einem Kegel. Am Beobachter als Knall wahrnehmbar.

$$\frac{v}{v_{ph}} = \text{Mach'sche Zahl}$$

Lisajous, Kreisel fehlen