Riemann-Integrale II 163

$$\int \ldots \int_Q f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad \text{kurz: } \int_Q f\, dx$$

$$n=2:\ \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy \qquad n=3:\ \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Ist f auf Q stetig, so ist f auf Q auch integrierbar.

Eigenschaften II 164

1) $\int_Q (f+g)\,dx = \int_Q f\,dx + \int_Q g\,dx$, $\int_Q (cf)\,dx = c\int_Q f\,dx$

2) $f \le g$ auf Q $\Rightarrow$ $\int_Q f\,dx \le \int_Q g\,dx$

3) $\left|\int_Q f\,dx\right| \le \int_Q |f|\,dx$

Satz von Fubini für stetige Funktionen II 166

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{Q_2}\left[\int_{Q_1} f(x,y)\,dx\right]dy = \int_{Q_1}\left[\int_{Q_2} f(x,y)\,dy\right]dx$$

Berechnung der Riemann-Integrals über Q II 166

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

$$\int_Q f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

$$n=2: \int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy \qquad n=3: \int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Das R-Integral über beschränkte Mengen II 169

$$|B| = \int_B \chi_B(x)\,dx = \int \ldots \int_B 1\, dx_1 \ldots dx_n$$

$n=2$: $|B| = \iint_B 1\,dx\,dy$ Flächeninhalt von $B \subset \mathbb{R}^2$

$n=3$: $|B| = \iiint_B 1\,dx\,dy\,dz$ Volumen von $B \subset \mathbb{R}^3$

Substitutionsregel II 176

$$\int_B f(x)\,dx = \int_{B^*} f(\Phi(u))\,\left|\det J_\Phi(u)\right|\,du$$

Berechnung des R-Integrals über einen Normalbereich II 171

$$n=2:\ \int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$n=3:\ \int_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\varphi_2(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

Kurvenintegral III 10 / 13

C sei eine Kurve, dargestellt durch $\boldsymbol{r}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, und φ sei ein Skalarfeld, das entlang C stetig sei.

Dann heißt $\int_C \varphi\,ds = \int_\alpha^\beta \varphi(\boldsymbol{r}(t))\,\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|\,dt$ Kurvenintegral des Skalarfeldes φ längs C.

C sei eine durch die Funktion $\boldsymbol{r}: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ dargestellte Kurve. Das Vektorfeld $\mathrm{f}: C \to \mathbb{R}^n$ sei auf C stetig. Dann heißt $\int_C \mathrm{f}\,dr = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt$ Kurvenintegral von f längs C.

Schema für Berechnung des Kurvenintegrals III 13

- Parametrisierung von $C: \vec{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))^T$
- Berechnung des Kurvenelements: $d\vec{r}=(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T dt$
- Berechnung des Integrals: $\int_C \vec{f}\, d\vec{r}=\int_\alpha^\beta (f_1(\vec{r}(t))\dot{x}(t)+f_2(\vec{r}(t))\dot{y}(t)+f_3(\vec{r}(t))\dot{z}(t))dt$

Anwendungsformeln III 10

1) Länge: $\int_C 1\, ds=\int_\alpha^\beta \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$ 2) Masse: $\int_C \varrho(x, y, z) ds$ ϱ=Massendichte für Kurve über C

3) Schwerpunkt: ϱ=Massendichte für Kurve über C, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$=Koordinaten des Schwerpunktes

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_C x\varrho(x, y, z) ds \quad , \quad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_C y\varrho(x, y, z) ds \quad , \quad \bar{z}=\frac{1}{M}\int_C z\varrho(x, y, z) ds$$

4) Trägheitsmoment: ϱ=stetige Massendichte (s.o.), $\delta(x, y, z)$=Abstand zu Gerade g

$$I_g=\int_C \delta(x, y, z)^2 \varrho(x, y, z) ds$$

5) Potential: ϱ=Linienladungsdichte auf C, r=beliebiger Punkt außerhalb C, r'=Punkt auf C

$$U(r)=c\int_C \frac{\varrho(r')}{\|r-r'\|} ds' \quad \text{mit } c=\frac{1}{4}\pi\epsilon_0$$

Grundlegende Eigenschaften des Kurvenintegrals III 14

a) $\int_C (\mathrm{f}+\mathrm{g}) dr=\int_C \mathrm{f}\, dr+\int_C \mathrm{g}\, dr$, $\int_C k\mathrm{f}\, dr=k\int_C \mathrm{f}\, dr$ b) $\int_C \mathrm{f}\, dr=\int_{C_1} \mathrm{f}\, dr+\int_{C_2} \mathrm{f}\, dr$ für $C=C_1\circ C_2)$

c) $\int_C \mathrm{f}\, dr=-\int_{C_*} \mathrm{f}\, dr$ d) $\left|\int_C \mathrm{f}\, dr\right|\le\left(\underbrace{\max}_{x\in C}\|\mathrm{f}(x)\|\right)L$ (L=Länge von C)

---

stetiges Vektorfeld / Gradientenfeld III 18

Ein stetiges Vektorfeld f heißt Gradientenfeld, wenn es ein stetig diff.bares Skalarfeld φ auf G gibt:

$$\vec{f}(x)=\operatorname{grad}\varphi(x) \qquad (\varphi \text{ Stammfunktion}, \quad U=-\varphi \text{ Potential})$$

notwendige Bedingung / Integrabilitätsbedingung III 21

$$J_f(x)=J_f(x)^T \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \quad (i, k=1, \ldots, n)$$

hinreichende Bedingung (s. III 22)

Kurvenintegral als Potentialdifferenz III 18

$\vec{f}$=Gradientenfeld φ=Stammfunktion von $\vec{f}$ für jede Kurve C, die die Punkte a, b verbindet, gilt:

$$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}=\varphi(b)-\varphi(a) \quad (=U(a)-U(b))$$

Charakterisierung von Gradientenfeldern III 19 / 23

für ein stetiges Vektorfeld $\vec{f}$ gilt:

- $\vec{f}$ ist ein Gradientenfeld
- Für eine beliebige Kurve C in G ist das Integral $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$ wegunabhängig
- Für jede geschlossene Kurve Γ in G gilt: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r}=0$
- f ist genau dann ein Gradientenfeld auf einfach zusammenhängendem G, wenn die Integrabilitätsbedingung auf G erfüllt ist.

Flächen und Oberflächenintegrale — III 26 / 27 / 31

B sei ein kompakter Bereich des $\mathbb{R}^2$, dessen Inneres nicht leer und dessen Rand ∂B eine Kurven sei.

$$\vec r(u,v)=\left(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)\right)^T$$

Tangentialvektoren: $\frac{\partial \vec r(u_0, v_0)}{\partial u}$ $\quad \frac{\partial \vec r(u_0, v_0)}{\partial v}$ Normalenvektor: $\vec N(u_0, v_0)=\frac{\partial \vec r(u_0, v_0)}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r(u_0, v_0)}{\partial v}$

Flächenstück S mit Darstellung $r: B\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; f stetiges Skalarfeld auf S

$$\underbrace{\int_S f\,d\sigma}_{\text{(Ober-)Flächenintegral}}=\int_B f(\vec r(u,v))\|\vec N(u,v)\|\,du\,dv=\int_B f(\vec r(u,v))\sqrt{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2}\,du\,dv$$

Berechnung des Normalenvektors — III 28

$$\vec N(u,v)=\begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_v\\y_v\\z_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_u z_v-y_v z_u\\z_u x_v-z_v x_u\\x_u y_v-x_v y_u\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}y_u & y_v\\z_u & z_v\end{vmatrix}}_{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}\vec e_1+\underbrace{\begin{vmatrix}z_u & z_v\\x_u & x_v\end{vmatrix}}_{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}\vec e_2+\underbrace{\begin{vmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{vmatrix}}_{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\vec e_3$$

$$=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec e_1+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec e_2+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec e_3$$

häufig verwendete (normierte) Normalenvektoren s. III 29 / 30

$$\|\vec N(u,v)\|=\sqrt{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}^2+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}^2}$$

Flächenintegral eines Vektorfeldes — III 34

$$\int_S \vec f\,d\vec\sigma=\int_S \vec f\cdot\vec n\,d\sigma=\int_B \vec f(\vec r(u,v))\cdot\vec N(u,v)\,du\,dv=\int_B \vec f(\vec r(u,v))\cdot\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^T du\,dv$$

Integralsätze von Gauß und Stokes / Greensche Integralformeln — III 37 / 38 / 40 / 41

$$\overbrace{\oint_S}^{\text{Fläche}} \vec f\cdot\vec n\,d\sigma=\overbrace{\int_V}^{\text{Volumen}}\operatorname{div}\vec f\,dx\,dy\,dz$$ (Divergenzsatz von Gauß) $\quad \operatorname{div}\vec f=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}$

$$\overbrace{\int_C}^{\text{Kurve}} \vec f\cdot d\vec r=\overbrace{\int_S}^{\text{Fläche}}\operatorname{rot}\vec f\cdot\vec n\,d\sigma$$ (Stokesscher Satz) $\quad \operatorname{rot}\vec f=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z},\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^T$

$$\oint_C f_1\,dx+f_2\,dy=\iint_B\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$ (Stokessche Formel für die Ebene)

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \int_V (u\,\Delta v+\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v)\,dx\,dy\,dz=\oint_S u\frac{\partial v}{\partial\vec n}\,d\sigma\\
&2)\ \int_V (u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=\oint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec n}-v\frac{\partial u}{\partial\vec n}\right)d\sigma\\
&3)\ \int_V \Delta u\,dx\,dy=\oint_S\frac{\partial u}{\partial\vec n}\,d\sigma
\end{aligned}\right\}$$ Hierin ist $\vec n$ die nach außen gerichtete Normale.

Folgerungen aus den Integralsätzen III 44 – 47

V_r=Kugel mit Radius r, Mittelpunkt $\vec{a}$, S_r Oberfläche von V_r

$$\operatorname{div}\vec{f}(\vec{a})=\lim_{r\to 0}\frac{1}{|V_r|}\oint_{S_r}\vec{f}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$ ($\vec{n}$=äußere Normale auf S_r) $\vec{f}$ heißt quellenfrei, wenn $\operatorname{div}\vec{f}(x)=0$

S_t=Kreisscheibe mit Radius t, Mittelpunkt $\vec{a}$, C_t=Randkurve von S_t

$$\operatorname{rot}\vec{f}(\vec{a})\cdot\vec{n}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{|S_t|}\oint_{C_t}\vec{f}\cdot d\vec{r}$$ $\vec{f}$ heißt auf einem Bereich B wirbel-/rotationsfrei, wenn $\operatorname{rot}\vec{f}(x)=0$

Krummlinige Koordinaten / Koordinatentransformation III 47 – 52

$$\vec{f}(x)=f_1(x)\vec{e}_1+f_2(x)\vec{e}_2+f_3(x)\vec{e}_3 \quad\Rightarrow\quad \vec{F}(u)=F_1(u)\vec{e}_u+F_2(u)\vec{e}_v+F_3(u)\vec{e}_w$$

Seien $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ ONB in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $F_1(u)=\vec{f}(\vec{\Phi}(u))\cdot\vec{e}_u$, $F_2(u)=\vec{f}(\vec{\Phi}(u))\cdot\vec{e}_v$, $F_3(u)=\vec{f}(\vec{\Phi}(u))\cdot\vec{e}_w$

Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten III 52

1) $$\operatorname{grad}\psi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u}\vec{e}_u+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\vec{e}_v+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial w}\vec{e}_w$$

2) $$\operatorname{div}F=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2h_3F_1)+\frac{\partial}{\partial v}(h_1h_3F_2)+\frac{\partial}{\partial w}(h_1h_2F_3)\right]$$

3) $$\operatorname{rot}F=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_u & h_2\vec{e}_v & h_3\vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3\end{vmatrix}$$

4) $$\Delta\psi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)\right]$$

Komplexe Funktionen in Vektorfeld-Darstellung III 58

$$z=x+jy=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\quad f(z)=u(z)+jv(z)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$$

Polynome und rationale Funktionen III 60

$p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ (Polynom vom Grad n)

$\dfrac{p(z)}{q(z)}=h(z)+\dfrac{r(z)}{q(z)}$ mit Grad r < Grad q (Divisionssatz)

$p(z)=a_n(z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{n_k}$

Komplexe Exponentialfunktion III 60 / 61

$$\mathrm{e}^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots \qquad \mathrm{e}^{jt}=\cos t+j\sin t \qquad \mathrm{e}^z=e^{x+jy}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{jy}=\mathrm{e}^x(\cos y+j\sin y)$$

Eigenschaften: 1) $\mathrm{e}^{z_1+z_2}=\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ 3) $\mathrm{e}^{k\pi j}=(-1)^k$

2) $\mathrm{e}^{-z}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z}$ 4) $\mathrm{e}^{z+2\pi j}=\mathrm{e}^z$

Komplexer Logarithmus III 61 / 62

$w=\ln z \qquad \mathrm{e}^w=z \qquad \ln z=\ln|z|+j\arg(z)$ mit $\arg(z)\in(-\pi,\pi]$ $\qquad a^z=\mathrm{e}^{z\ln a}$

Komplexe hyperbolische Funktionen III 63 / 64

$$\cosh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z})=\cos(jz)\ ,\quad \sinh z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z})=-j\sin(jz)$$

Komplexe trigonometrische Funktionen — III 62 / 63

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$, $\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz})$

Eigenschaften:

Additionstheoreme	$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
	$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
	$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
Zerlegung	$\cos(x+jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$
	$\sin(x+jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y$

Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit — III 65

$f = u + jv$ ist im Punkt $z = x + jy$ komplex differenzierbar, wenn $f = (u, v)^T$ in (x, y) total differenzierbar und die Cauchy-Riemannschen DGLn im Punkt (x, y) gelten:

$$u_x(x, y) = y_y(x, y) \ , \ u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

Für die Ableitung gilt dann: $f'(x+jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$

Rechenregeln für komplexe Ableitungen — III 67

1) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$
2) $(\alpha f(z))' = \alpha f'(z)$
3) $(f(z) g(z))' = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$
4) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g(z)^2}$
5) $[F(g(z))]' = F'(g(z)) g'(z)$

f	f'	G	f	f'	G
c	0	$\mathbb{C}$	$\cos z$	$-\sin z$	$\mathbb{C}$
z^n	nz^{n-1}	$\mathbb{C}$	$\sinh z$	$\cosh z$	$\mathbb{C}$
e^z	e^z	$\mathbb{C}$	$\cosh z$	$\sinh z$	$\mathbb{C}$
e^{az}	$a e^{az}$	$\mathbb{C}$	$\ln z$	$\frac{1}{z}$	$\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$
$\sin z$	$\cos z$	$\mathbb{C}$	$\frac{1}{z^n}$	$\frac{-n}{z^{n+1}}$	$\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$

Harmonische Funktionen — III 68

Eine reelle C^2-Funktion heißt harmonisch, wenn sie die Laplace'sche DGL erfüllt:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Ist $f = u + jv$ eine analytische / homomorphe Funktion so folgt:

$$u_{xx} = v_{yx} \ , \ u_{yy} = -v_{xy} \ , \ u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Isolierte Singularitäten — III 70 – 72

z_0 sei eine isolierte Singularität der Funktion f.

a) z_0 wird hebbar genannt, wenn $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert.

b) z_0 heißt Pol der Ordnung n, wenn $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z)$ existiert und $\neq 0$ ist.

c) Im verbleibenden Fall spricht man von einer wesentlichen Singularität

Integration komplexer Funktionen III 73 – 82

$z(t)=x(t)+jy(t)$ mit $\alpha\le t\le\beta \quad f=u+jv$

komplexes Kurvenintegral: $\int_C f\,dz=\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt$

Eigenschaften:

a) $\int_C (f+g)\,dz=\int_C f\,dz+\int_C g\,dz \quad , \quad \int_C af\,dz=a\int_C f\,dz$

b) $\int_C f\,dz=\int_{C_1} f\,dz+\int_{C_2} f\,dz \quad$ (für $C=C_1\circ C_2$)

c) $\left|\int_C f\,dz\right|\le\left(\max_{x\in C}|f(z)|\right)L \quad$ ($L=$ Länge von C)

Cauchyscher Integralsatz: $\oint_C f(z)\,dz=0$

Integration mittels Stammfunktion: $\int_C f(z)\,dz=F(b)-F(a)$

Integralformel von Cauchy: $f(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(s)}{s-z}ds \quad\Rightarrow\quad \oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi j\,f(a)$

Zusammenhang Sinus- und e-Funktion III 101

$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{jx}+\mathrm{e}^{-jx}) \quad , \quad \sin x=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{jx}-\mathrm{e}^{-jx})$

$\cos(k\omega t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{jk\omega t}+\mathrm{e}^{-jk\omega t}) \quad , \quad \sin(k\omega t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{jk\omega t}-\mathrm{e}^{-jk\omega t})$

Komplexe Potenzreihen III 83

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$ (komplexe Potenzreihe)

Konvergenzradius: a) $r=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ b) $r=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$

geometr. Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k=1+z+z^2+\ldots=\frac{1}{1-z}$ (für $|z|<1$)

Exponentialreihe: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots=\mathrm{e}^z$ (für alle $z\in\mathbb{C}$)

Integration III 84

Integration

$\int_C f(z)\,dz=\int_C\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\right)dz=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\int_C (z-z_0)^k\,dz$

Differentiation III 84

$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k(z-z_0)^{k-1}$

$f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k(z-z_0)^{k-2}$

… usw.

Koeffizienten $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Komplexe Taylorreihe / -entwicklung III 85

$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ (Taylorreihe)

Ableitungen: $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi j}\oint_{|s-z|=\varrho}\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds$

Laurentreihe III 88 / 89

$$S(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{pos. Teil: } 0\to+\infty} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}}_{\substack{\text{neg. Teil: } -1\to-\infty \\ \text{Hauptteil}}}$$

Konvergenzgebiet (Kreisring): $M=\{z\in\mathbb{C} \mid R<|z-z_0|<r\}$

Darstellungssatz: $f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z-z_0)^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$

Koeffizienten: $a_m = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|s-z_0|=\varrho} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{m+1}} ds$

Charakterisierung isolierter Singularitäten III 92

z_0 einer Laurent-Entwicklung ist genau dann

a) hebbar, wenn der Hauptteil verschwindet $\Rightarrow$ $a_{-k}=0 \quad \forall k\geq 1$

b) Pol der Ordnung n $(n\in\mathbb{N})$, wenn im Hauptteil $a_{-n}\neq 0$, aber $a_k=0 \quad \forall k>n$

c) wesentlich, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind

Residuenkalkül III 94 – 98

z_0=isolierte Singularität von f $\rightarrow$ a_{-1} um z_0=Residuum von f an Stelle z_0: $\operatorname{res}(f, z_0)=a_{-1}$

$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{p} \operatorname{res}(f, z_k)$ (Residuensatz)

Berechnung des Residuums an einer Polstelle: $\operatorname{res}(f, z_0)=\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \right\}$

für $n=1$: $\operatorname{res}(f, Z_0)=\lim_{z\to z_0} [(z-z_0) f(z)]$ für $n=2$: $\operatorname{res}(f, z_0)=\lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d}{dz} [(z-z_0)^2 f(z)] \right\}$

Berechnung eines reellen Integrals mit Residuen: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{p} \operatorname{res}(f, z_k)$

Fourierreihen III 99 – 102, 108

periodische Funktion mit Periode T: $f(t+T)=f(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

a) $f\cdot g$ und $\alpha f+\beta g$ (für beliebige $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$) sind ebenfalls T-periodisch auf $\mathbb{R}$

b) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

$p_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t)+b_k \sin(k\omega t))$ (T-periodisches trigon. Polynom vom Grad n)

$=c_0+\sum_{k=1}^{n} c_k e^{jk\omega t}+\sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{j(-k)\omega t}$ $\quad c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_k=\frac{1}{2}(a_k-b_k j)$, $c_{-k}=\overline{c_k}$

$a_0=2c_0$, $a_k=2\operatorname{Re}(c_k)$, $b_k=-2\operatorname{Im}(c_k)$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t)+b_k \sin(k\omega t))$ (trigonometrische Reihe)

$\frac{1}{2}(f(t+)+f(t-))=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t)+b_k \sin(k\omega t))$ (Darstellungssatz)

Bestapproximation III 106 / 107

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-jk\omega t}\,dt$$

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)) \quad \text{wenn:} \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(K\omega t)dt$$

Gerade und ungerade T-periodische Funktionen III 110

f heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ f heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$

Ist f gerade, gilt für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$: $b_k = 0$ (keine Sin-Funktionen in F-Reihe)

Ist f ungerade, gilt für alle $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$: $a_k = 0$ (keine Cos-Funktionen u. Konstanten in F-Reihe)

Fourriertransformation III 114 – 122

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{(Fourriertransformierte)}$$

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega \quad \text{(Transformationsformel)}$$

$$\overbrace{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega}^{\text{für jeden Stetigkeitspunkt}} \qquad \overbrace{\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega}^{\text{für Sprungstellen}} \quad \text{(Umkehrformeln)}$$

$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$ (Linearität)

$$\left.\begin{aligned} f(t - t_0) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-jt_0\omega}F(\omega) \\ \mathrm{e}^{j\omega_{0t}}f(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega - \omega_0) \end{aligned}\right\} \text{(Verschiebungssatz I und II)}$$

$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (Ähnlichkeitssatz)

$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j\omega F(\omega)$ (Differentiation im Zeitbereich)

$tf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ jF'(\omega)$ (Differentiation im Bildbereich)

	Transformationsformel	***Umkehrformel***
f gerade	$F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos(\omega t)d\omega$
f ungerade	$F(\omega) = -2j\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$	$f(t) = -\frac{j}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\sin(\omega t)d\omega$

Faltungsprodukt III 123

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

1) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (Assoziativgesetz)
2) $f*g = g*f$ (Kommutativgesetz)
3) $f*(g+h) = f*g + f*h$ (Distributivgesetz)
4) $F(\omega)\cdot G(\omega)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ (f*g)(t)$ (Faltungssatz)

Rücktransformation mit dem Residuenkalkül III 125

Voraussetzungen s. III 125

$$f(t) = \begin{cases} j\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(\mathrm{e}^{jtz}F(z), z_k), & \text{für } t > 0 \\ -j\sum_{i=1}^{m}\operatorname{res}(\mathrm{e}^{jtz}F(z), s_i), & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Laplace-Transformation III 128 – 134

Laplace-Integral: $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$ mit $s = x + j\omega \in \mathbb{C}$

Laplace-Transformierte: $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$

hinr. Bed.: $|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{kt}$

$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T\to\infty} \int_{x-Tj}^{x+Tj} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,ds$ (für $t > 0$) (Umkehrformel)

Beispiele für transformierte trigonometrische Funktionen s. III 133

Abbildungsgesetze III 135 – 145

Differentiation u. Integration im Zeitbereich

$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \ldots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$ (Differentiationssatz)

Speziell für $n = 1$ bis 4:

$L\{f'(t)\} = s F(s) - f(0+)$

$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0+) - f'(0+)$

$L\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0+) - s f'(0+) - f''(0+)$

$L\{f^{(4)}(t)\} = s^4 F(s) - s^3 f(0+) - s^2 f'(0+) - s f''(0+) - f'''(0+)$

$h(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{F(s)}{s}$ (Integrationssatz)

$F(s) \cdot G(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (f * g)(t)$ (Faltungssatz)

$f(at) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ (Ähnlichkeitssatz)

$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & f(t-a)\,\sigma(t-a) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{e}^{-as} F(s) \\ \text{II)} & \mathrm{e}^{bt} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s-b) \end{array}\right\}$ (Verschiebungssätze)

Korrespondenztafel III 149

$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$	
$\sigma(t) = 1$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$	$\Re\{s\} > \lvert\alpha\rvert$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\Re\{s\} > a$	$\frac{\mathrm{e}^{at} - \mathrm{e}^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\Re\{s\} > b$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$	$\mathrm{e}^{bt}\cos(\alpha t)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + \alpha^2}$	$\Re\{s\} > b$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} > 0$	$\mathrm{e}^{bt}\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s-b)^2 + \alpha^2}$	$\Re\{s\} > b$
$\frac{t^{n-1}\mathrm{e}^{bt}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-b)^n}$	$\Re\{s\} > b$	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re\{s\} > \lvert\alpha\rvert$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	$\Re\{s\} > \lvert\alpha\rvert$	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$	$\Re\{s\} > \lvert\alpha\rvert$

Partialbruchzerlegung III 149 – 150

$A_k = \lim_{s\to a_k} \left[(s - a_k) \frac{P(s)}{Q(s)}\right]$ (Heavisidesche Formel)

Rücktransformation mit Residuenkalkül — III 151 – 152

$$f(t)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}\left(F(s)\mathrm{e}^{st},s_k\right),\ \text{für } t>0$$

Bezug zur Fouriertransformation — III 152

1) $F\{f(t)\}=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt$ 2) $L\{f(t)\}=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$

Differentiation und Integration im Bildbereich — III 155 – 156

$F^{(n)}(s)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ (-t)^n f(t)$ $H(s)=\int\limits_{s}^{\infty} F(\xi)\,d\xi\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \dfrac{f(t)}{t}$

Z-Transformation — III 157 – 159

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}=F(z)=Z\{f_n\}$$

a) $|f_n|\le M\,\mathrm{e}^{cn}$ $M,c=$ pos. Konstanten
$\Rightarrow$ Folge hat Z-Transformierte F

b) $f_n=\dfrac{1}{n!}\left[H^{(n)}(z)\right]\Big|_{z=0}$ mit $H(z)=F\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Rücktransformation — III 161 – 162

a) $f_0=\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$

b) $f_n=\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\left(F(z)\cdot z^{n-1}\right),z_k\right)$

Elementare Transformationspaare — III 159 – 161

	(f_n)	$F(z)$		(f_n)	$F(z)$
1.	(1)	$\dfrac{z}{z-1}$	5.	(a^n)	$\dfrac{z}{z-a}$
2.	$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$	6.	(na^{n-1})	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
3.	(n)	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	7.	$\left(\binom{n}{k}\right)$	$\dfrac{z}{(z-1)^{k+1}}$
4.	(n^2)	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	8.	$\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)$	$\mathrm{e}^{\frac{a}{z}}$

Abbildungsgesetze — III 164 – 170

$$(f_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z)\ ,\ (g_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(z)\ \Rightarrow\ \alpha(f_n)+\beta(g_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha F(z)+\beta G(z)$$

$f_n^k=\begin{cases}0 & \text{für } 0\le n\le k-1\\ f_{n-k} & \text{für } n\ge k\end{cases}$ (Verschiebung um k Zeittakte nach rechts)

$$\left(f_n^k\right)\ \to\ \frac{F(z)}{z^k}=F_k(z)$$

${}^k f_n=f_{n+k}$ (Verschiebung um k Zeittakte nach links)

$$(f_{n+k})\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^k\left(F(z)-\sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i}\right)={}^kF(z)$$

$k=1$: $(f_{n+1})\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ z(F(z)-f_0)$
$k=2$: $(f_{n+2})\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^2(F(z)-f_0-f_1z^{-1})$
$k=3$: $(f_{n+3})\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^3(F(z)-f_0-f_1z^{-1}-f_2z^{-2})$

$h_n=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$ (Faltung der Folgen (f_n) und (g_n))

$F(z)G(z)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ (f_n)*(g_n)$ (Faltungssatz)

Differenzenfolgen — III 171 – 172

$\Delta^m f_n=\Delta^{(m-1)} f_{n+1}-\Delta^{(m-1)} f_n$

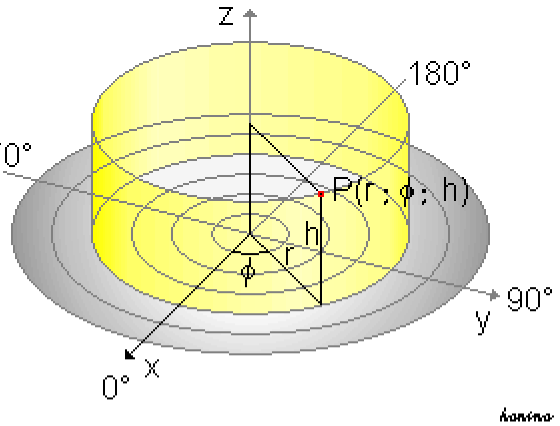
$\Delta f_n=f_{n+1}-f_n$
$\Delta^2 f_n=\Delta f_{n+1}-\Delta f_n$
$\Delta^3 f_n=\Delta^2 f_{n+1}-\Delta^2 f_n$

$(\Delta f_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ (z-1)F(z)-f_0 z$

$(\Delta^2 f_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ (z-1)^2F(z)-f_0 z(z-1)-\Delta f_0 z$

$(\Delta^3 f_n)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ (z-1)^3F(z)-f_0 z(z-1)^2-\Delta f_0 z(z-1)-\Delta^2 f_0 z$

Zylinderkoordinaten



$$\vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad , \quad 0 \le z \le h$$

$$\int_S f\,d\sigma = \int_B f(\vec{r}(\varphi, z))R\;d\varphi\,dz$$

$$\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_B \vec{f}(\vec{r}(\varphi, z))\cdot R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\,dz$$

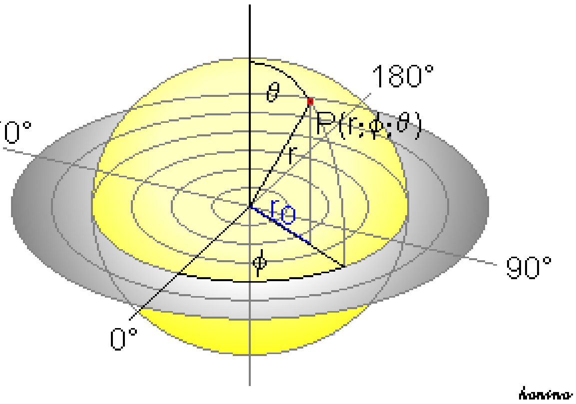
Metrikkoeffizienten

$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \varrho \quad , \quad h_3 = 1$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten



$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad 0 \le \vartheta \le \pi \quad , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\int_S f\,d\sigma = \int_B f(\vec{r}(\vartheta, \varphi))R^2\sin\vartheta\;d\vartheta\,d\varphi$$

$$\int_S \vec{f}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_B \vec{f}(\vec{r}(\vartheta, \varphi))\cdot R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

Metrikkoeffizienten

$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = R \quad , \quad h_3 = R\sin\vartheta$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$