Differentialgleichungen (DGL) **I 168**

Beispiel

$$y'(t)=-ky(t) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}=-ky \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-k\,dt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y}=-k\int dt$$
$$\Leftrightarrow \ln|y|=-kt+c_1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln|y|}=\mathrm{e}^{-kt+c_1} \Leftrightarrow |y|=\mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-kt} \Leftrightarrow y(t)=c\,\mathrm{e}^{-kt} \quad (\text{mit } e^{c_1}=c)$$

Anfangswertproblem (AWP)/Anfangswertbedingung (AWB) für eine DGL 1.Ordnung:

$\Phi(x,y,y')=0$, $y(x_0)=y_0$ (Festlegen von y bei einem bekannten Wert x_0)

DGL mit getrennten Variablen I 170

$y'=f(x)g(y)$, AWB: $y(x_0)=y_0$

Lösungsschema

1) Ausgangssituation: $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

   Trennung der Variablen: $\frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$

2) Integration auf beiden Seiten: $G(y)=\int \frac{dy}{g(y)}$, $F(x)=\int f(x)dx$

   Lösungsschar: $G(y)=F(x)+c$ (allgemeine Lösung)

3) Auflösen der Gleichung nach y und Bestimmen der Konstanten c durch Einsetzen von x_0 und y_0.

Lineare DGL 1. Ordnung $y'+a(x)y=s(x)$ $s(x)$ Störfunktion I 172

wenn $s=0 \Rightarrow$ homogene DGL

wenn $s\neq 0 \Rightarrow$ inhomogene DGL

Lösungsschema

1) homogene DGL:

$$\frac{dy}{y}=-a(x)dx \Leftrightarrow \ln|y|=-\int a(x)dx=-A(x)+c_1 \Leftrightarrow |y|=\mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-A(x)}$$

$\Rightarrow$ $y(x)=c\,\mathrm{e}^{-A(x)}$ (nach Auflösen der Betragsstriche und setzen von $c=\mathrm{e}^{c_1}$ bzw. $c=\mathrm{e}^{-c_1}$)

2) inhomogene DGL:

sei $y(x)=c(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ eine beliebige Lösung der lin. DGL

Einsetzen in die lin. DGL (wobei $(\mathrm{e}^{-a(x)})'=-A'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}=-a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$):

$$s(x)=y'(x)+a(x)y(x)=\overbrace{c'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}-c(x)a(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}^{\text{Einsetzung für } y'(x)}+a(x)\overbrace{c(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}^{\text{Einsetzung für } y(x)}=c'(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow c'(x)=\mathrm{e}^{A(x)}s(x) \Rightarrow c(x)=\int \mathrm{e}^{A(x)}s(x)dx$$

$$\Rightarrow y(x)=\mathrm{e}^{-A(x)}\left(\int \mathrm{e}^{A(x)}s(x)dx\right)$$

Die additive Konstante c des Integrals wird durch die Anfangsbed. $y(x_0)=y_0$ bestimmt.

Lineare DGL 2. Ordnung $y''+ay'+by=s(x)$ $\quad a,b$ Konstanten , $s(x)$ Störfunktion I 180

wenn $s=0 \Rightarrow$ homogene DGL $\quad$ wenn $s\neq 0 \Rightarrow$ inhomogene DGL

AWB: $y(x_0)=r_0 \;,\; y'(x_0)=v_0$

Lösungsschema

1) homogene DGL

$p(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$ $\quad$ charakteristisches Polynom $\Rightarrow$ Nullstellen λ_1,λ_2 berechnen

Fallunterscheidung:

a) $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R} \Rightarrow y_h(x)=c_1 e^{\lambda_1 x}+c_2 e^{\lambda_2 x}$ (allg. Lösung)

b) $\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\beta j \Rightarrow y_h(x)=c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ (allg. Lösung)

c) $\lambda_1=\lambda_2$ (doppelte Nullstelle) $\Rightarrow y_h(x)=(c_1+c_2 x)e^{\lambda_1 x}$ (allg. Lösung)

Ableitungen der allg. Lösung bilden und AWB einsetzen, um ein LGS für c_1 und c_2 zu erhalten und die erhaltenen Lösungen für c_1 und c_2 in die allgemeine Lösung einsetzen.

2) inhomogene DGL

$y(x)=\underbrace{y_h(x)}_{\text{allg. (hom.) Lsg}}+\underbrace{y_p(x)}_{\text{spez. Lsg}}$

Wie allg. Lösung lösen, anschließend Bestimmung der spez. Lösung
Unterscheidung nach Form des Störgliedes $s(x)$

Form d. Störgliedes $s(x)$	Ansatz f. $y_p(x)$	Voraussetzung
$b_0+b_1x+\ldots+b_m x^m$	$A_0+A_1x+\ldots+A_m x^m$	$p(0)\neq 0$
	$x(A_0+A_1x+\ldots+A_m x^m)$	$p(0)=0$
$b_0 e^{wx}$	$A_0 e^{wx}$	$p(w)\neq 0$
	$A_0 x^k e^{wx}$	w ist k-fache NST v. p
$e^{wx}\cos vx$ oder $e^{wx}\sin vx$	$e^{wx}(A\cos vx+B\sin vx)$	$p(w+jv)\neq 0$
	$x\,e^{wx}(A\cos vx+B\sin vx)$	$p(w+jv)=0$
$(b_0+b_1x+\ldots+b_m x^m)e^{wx}$	$(A_0+A_1x+\ldots+A_m x^m)e^{wx}$	$p(w)\neq 0$
	$x^k(A_0+A_1x+\ldots+A_m x^m)e^{wx}$	w ist k-fache NST v. p

Einsetzen in die DGL (Ableitungen!) und LGS für Konstanten A, B, A_0, A_1 etc. aufstellen (Koeffizientenvergleich!).

Lösung:
$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

Variation der Konstanten (allgemeines Lösungsschema für inhomogene DGL) I 191

$y''+ay'+by=s(x)$ $\quad a,b$ Konstanten , $s(x)$ Störfunktion

$y(x)=\underbrace{y_h(x)}_{\text{allg. (hom.) Lsg}}+\underbrace{y_p(x)}_{\text{spez. Lsg}}$

allg. Lösung der homogenen DGL: $y_h(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$
Ersetzen aller Konst. durch Funktionen, so daß der Ansatz lautet:

$$y_p(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

$$N(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x) \qquad C_1(x)=\int\frac{-s(x)y_2(x)}{N(x)}dx \qquad C_2(x)=\int\frac{s(x)y_1(x)}{N(x)}dx$$

Weglassen der Integrationskonstanten und Einsetzen in $y_p(x)$

Vektorräume **II 32**

Unterräume II 34

- Jeder Unterraum U von V enthält den Nullvektor
- Die Menge $U_0=\{0\}$ ist der kleinste Unterraum von V
- Die Menge $U_1=V$ ist ebenfalls ein Unterraum. $\Rightarrow$ V ist Unterraum von sich selbst

---

Schnittmenge von Unterräumen II 37

$\forall i\in\{1,\ldots,m\}$ gilt U_i ist ein Unterraum von V

$\Rightarrow$ Der Durchschnitt $U=U_1\cap U_2\cap\ldots\cap U_m$ ist ebenfalls Unterraum in V

Linearkombination / Spann / Erzeugendensystem II 37

$\forall \vec{v}_{1,}\vec{v}_{2,}\ldots,\vec{v}_k\in V$ heißt die Summe $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v}_k=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k$ Linearkombination (LK) der $\vec{v}_i$

$\Rightarrow$ wird trivial genannt, wenn alle $\alpha_i=0$

$\text{span}(v_{1,}\ldots,v_k)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v}_k \mid \alpha_i\in K \text{ für } i\in\{1,\ldots,k\}\right\}$ (Spann der Vektoren $\vec{v}_i$)

$\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_k\in U$ heißen Erzeugendensystem, wenn U Unterraum von V und $U=\text{span}(v_{1,}\ldots,v_k)$

Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren II 39

Die Vektoren $v_{1,}\ldots,v_k\in K$ heißen

a) linear abhängig, wenn $\exists\alpha_{1,}\ldots,\alpha_k\neq 0\in K$, so daß gilt: $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k=0$

b) linear unabhängig, wenn sie <u>nicht</u> linear abhängig sind, d.h.

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$

Charakterisierung linearer Abhängigkeit II 40

Die Vektoren $\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_k\in V$ sind linear abhängig, wenn min. einer als LK der anderen darstellbar ist

Für ein System der Vektoren $\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_k$ gilt:
- Enthält es den Nullvektor, sind die Vektoren linear abhängig
- Ist ein Vektor das skalare Vielfache eines anderen, sind die Vektoren linear abhängig
- Enthält das System ein Teilsystem aus linear abhängigen Vektoren, ist es selbst linear abhängig
- Ist das System linear unabhänigig, ist auch jedes Teilsystem linear unabhängig

- $\text{span}(v_{1,}\ldots,v_k,w)=\text{span}(v_{1,}\ldots,v_k)$,wenn $\vec{w}$ linear abhängig von $\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_k$
- Die Vektoren $\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zur Erzeugung von $\text{span}(v_{1,}\ldots,v_k)$ kann kein Vektor $\vec{v}_i$ weggelassen werden

---

Basis II 42

Ein System $\{v_{1,}\ldots,v_n\}$ von Vektoren des K-Vektorraumes V heißt Basis, wenn gilt:

a) Die Vektoren $\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_n$ sind linear unabhängig

b) $V=\text{span}(v_{1,}\ldots,v_n)$

- Jeder $\vec{x}$ ist auf genau eine Weise als LK der v_i darstellbar: $\vec{x}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\ldots+\lambda_n\vec{v}_n$ ($\lambda_i=$ Koord.)
- Sei $\{\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_n\}$ Basis von V. Dann sind m Vektoren ($m>n$) stets linear abhängig.
- Hat V eine Basis $\{\vec{v}_{1,}\ldots,\vec{v}_n\}$, so besteht jede andere Basis ebenfalls aus genau n Elementen.
- V heißt endlich erzeugt / erzeugbar, wenn es endlich viele $\vec{w}_{1,}\ldots,\vec{w}_k$ gibt mit $\text{span}(w_{1,}\ldots,w_k)=V$

Dimension — II 45

Vektorraum $V \neq \{0\}$ ist endlich erzeugt. $\Rightarrow$ Alle Basen haben gleich viele Basisvektoren $n \Rightarrow \dim V = n$

- Je n linear unabhängige Vektoren von V bilden eine Basis
- Spannen n Vektoren V auf, so sind sie eine Basis
- Ist U ein echter Unterraum von V, so gilt: $\dim U < \dim V$

Räume mit Skalarprodukt (SP) — II 47

Je zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ des K-Vektorraums sei eindeutig eine Zahl $<a,b> \in K$ zugeordnet, so daß:

a) $<a,b> = \overline{<b,a>}$ (Kommutativ)

b) $<a+b,c> = <a,c> + <b,c>$ (Distributiv)

c) $<\lambda a, b> = \lambda <a,b>$ (Assoziativ)

d) $<a,a> \geq 0$; $<a,a>=0 \Leftrightarrow a=0$

Betrag / Länge / Norm von $\vec{a}$: $\|a\| = \sqrt{<a,a>}$

Eigenschaften der Norm:

a) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$

c) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$\vec{e}$ heißt Einheitsvektor, wenn $\|e\| = 1$ $\quad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{\|a\|}$

$\|a-b\|$ heißt Abstand der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$

$|<a,b>| \leq \|a\| \|b\|$ (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

Standardskalarprodukt — II 48

für $\mathbb{R}^n$:

$(\vec{a} = (a_i), \vec{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n)$

$<a,b> = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

$\|a\| = \sqrt{<a,a>} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

für $\mathbb{C}^n$:

$(\vec{z} = (z_i), \vec{w} = (w_i) \in \mathbb{C}^n)$

$<z,w> = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}$

$\|z\| = \sqrt{<z,z>} = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$

für $C(I)$:

$(f, g \in C(I)$ m. $I = [a,b], a < b)$

$<f,g> = \int_a^b f(x) g(x) dx$

$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$

Orthogonalität — II 51

a) $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ heißt orthogonal, wenn $\forall i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$: $<\vec{u}_i, \vec{u}_j> = 0$

b) $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ heißt orthonormal, wenn $<\vec{u}_i, \vec{u}_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{für } i \neq j \\ 1, \text{für } i = j \end{cases}$ *(nur Einheitsvektoren in Menge)*

c) Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt
   - Orthogonalbasis (OGB) von V, wenn alle Vektoren orthogonal
   - Orthonormalbasis (ONB) von V, wenn alle Vektoren orthogonal und Einheitsvektoren

Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ ONB von V ; $\forall x \in V$ gilt: $x = <x, u_1> u_1 + \ldots + <x, u_n> u_n$ (Darstellungssatz)

$\Rightarrow$ Koordinaten λ_i zur ONB $= <x, u_i>$

(Gram-Schmidtsches) Orthonormierungsverfahren — II 53

Übergang von beliebiger Basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ zu einer ONB

1.) $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1$

2.) $\tilde{u}_2 = \vec{v}_2 - <\vec{v}_2, \vec{u}_1> \vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\|\tilde{u}_2\|} \tilde{u}_2$

3.) $\tilde{u}_3 = \vec{v}_3 - <\vec{v}_3, \vec{u}_2> \vec{u}_2 - <\vec{v}_3, \vec{u}_1> \vec{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\|\tilde{u}_3\|} \tilde{u}_3$

$\vdots$

k.) $\tilde{u}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} <\vec{v}_k, \vec{u}_i> \vec{u}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_k = \frac{1}{\|\tilde{u}_k\|} \tilde{u}_k$

Matrizen

II 60

$$\underbrace{A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}}_{(m\times n\text{-Matrix})} \quad \underbrace{z_i=(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in})}_{i\text{-ter Zeilenvektor}} \quad \underbrace{s_j=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\ \vdots\\ \alpha_{mj}\end{pmatrix}}_{j\text{-ter Spaltenvektor}} \quad \underbrace{0=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}}_{(\text{Nullmatrix})} \quad \underbrace{E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}}_{(\text{Einheitsmatrix})}$$

$$A*x=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}x_1 & \alpha_{12}x_2 & \dots & \alpha_{1n}x_n\\ \alpha_{21}x_1 & \alpha_{22}x_2 & \dots & \alpha_{2n}x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}x_1 & \alpha_{m2}x_2 & \dots & \alpha_{mn}x_n\end{pmatrix}=b$$

$A=$ Koeffizientenmatrix
$(A,b)=$ erweiterte Koeff.matrix

wenn $b=0$ heißt das System homogen, sonst imhomogen

$\Rightarrow$ homogenes System besitzt immer mindestens 1 Lösung $(x=0)$

$$A\cdot(x+y)=A\cdot x+A\cdot y \quad , \quad A\cdot(\alpha x)=\alpha(A\cdot x)$$

Addition / Skalares Vielfaches

II 60

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \dots & \alpha_{1n}+\beta_{1n}\\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \dots & \alpha_{2n}+\beta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \dots & \alpha_{mn}+\beta_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \dots & \lambda\alpha_{1n}\\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda\alpha_{m1} & \lambda\alpha_{m2} & \dots & \lambda\alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

Operationen nur bei gleichen Matrix-Dimensionen $m\times n$!

Rechengesetze für $A, B, C, \ldots \in K^{m\times n}$ und $\alpha, \beta \in K$

V1) $A+B=B+A$
V2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
V3) $A+0=A$
V4) $A+(-A)=0$
V5) $1A=A$
V6) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
V7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
V8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

Transponierte Matrix

II 68

$$A\in K^{m\times n} \Rightarrow A^T\in K^{n\times m}$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}$$

Rechengesetze:

1) $(A_1+A_2)^T=A_1^T+A_2^T$
2) $(\alpha A)^T=\alpha A^T$
3) $(A^T)^T=A$
4) $(AB)^T=B^T A^T$
5) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

speziell für Vektoren:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}^T=(\beta_1,\dots,\beta_n)$$

Matrizenmultiplikation

II 62

$$AB=\begin{pmatrix} z_1 s_1 & z_1 s_2 & \dots & z_1 s_r \\ z_2 s_1 & z_2 s_2 & \dots & z_2 s_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m s_1 & z_m s_2 & \dots & z_m s_r \end{pmatrix} \qquad \overbrace{\begin{matrix} A=(\alpha_{ij})\in K^{m\times n} \\ B=(\beta_{ij})\in K^{n\times r}\end{matrix}}^{\text{Matrix-Dimensionen !}} \qquad \begin{matrix} z_i\in K^n = \text{ Zeilenvektoren von } A \\ s_j\in K^n = \text{ Spaltenvektoren von } B\end{matrix}$$

$$AB=(c_{ij})\in K^{m\times r} \qquad c_{ij}=z_i s_j=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{in})\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots \\ \beta_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\beta_{kj}$$

Beispiel: $$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}}_{\text{Zeile}*\text{Spalte}}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}\end{pmatrix}$$

andere Darstellungen des Matrizenprodukts: $AB=(As_1, As_2,\dots,As_r)$, $AB=\begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_n B\end{pmatrix}$

Produkt Ax $(x\in K^n)$ als LK der Spaltenvektoren $a_1,\dots,a_n$ von A:

$$Ax=\begin{pmatrix}\alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n \\ \dots \\ \alpha_{m1}x_1+\dots+\alpha_{mn}x_n\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots \\ \alpha_{m1}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}\alpha_{1n}\\ \vdots\\ \alpha_{mn}\end{pmatrix} \Rightarrow Ax=x_1a_1+\dots+x_na_n$$

Rechengesetze: $(A, A_1, A_2\in K^{m\times n}$, $B, B_1, B_2\in K^{n\times r}$, $C\in K^{r\times s}$, $\alpha\in K)$

1) $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$ 4) $A(BC)=(AB)C$

2) $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$ 5) $AE=A=EA$

3) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ 6) $AB\neq BA$

Invertierbare Matrizen

II 64

$A\in K^{n\times n}$ heißt quadratische Matrix (gleiche Zeilen- und Spaltenzahl!)

sei $B\in K^{n\times n}$: wenn $AB=BA=E$ dann heißt A invertierbar u. B Inverse von A $\Rightarrow$ $B=A^{-1}$

Eine untere/obere Dreiecksmatrix $A\in K^{n\times n}$ hat eine Inverse, wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$

Eigenschaften: $E^{-1}=E$ $\quad (A^{-1})^{-1}=A$ $\quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$$AX=C \Rightarrow \underbrace{X=A^{-1}C}_{\text{Reihenfolge!}} \qquad YA=C \Rightarrow \underbrace{Y=CA^{-1}}_{\text{Reihenfolge!}}$$

Methoden: (s. auch "Determinanten - Inversenberechnung"!)

speziell für $A\in K^{2\times 2}$: $\quad A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$

allgemein:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ -1}}^{A}} & & & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}}_{z_2-3z_1,\, z_3-z_1} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}}_{z_3-2z_2} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1\end{array}}_{z_1-z_3,\, -z_3} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{-4\ 2\ -1}}^{A^{-1}}} \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1\end{array}$$

Rang einer Matrix II 70

$$A=\alpha_{ij}\in K^{m\times n} \quad \text{Spaltenvektoren: } a_1,\dots,a_n\in K^n \quad \text{Zeilenvektoren: } z_1,\dots,z_m\in K^m$$

$\mathrm{Rg}(A)=\dim R(A)=\dim\operatorname{span}(a_1,\dots,a_n)$ (Spaltenrang von A)

$\mathrm{Rg}(A)=\dim R(A)=\dim\operatorname{span}(z_1^T,\dots,z_n^T)$ (Zeilenrang von A)

Für jede Matrix $A\in K^{m\times n}$ ist der Zeilen- und Spaltenrang identisch und kann aus der Zeilenstufenform (Gauß) abgelesen werden!

Lösbarkeitskriterium:

$A\in K^{m\times n}$ $b\in K^m$ $\Rightarrow$ Das LGS $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rg}(A,b)=Rg(A)$. Zur Darstellung der Lösungsmenge sind $n-\mathrm{Rg}(A)$ Parameter nötig. (Wenn $n=\mathrm{Rg}(A)\Rightarrow$ genau 1 Lösung)

Invertierbarkeitskriterium:

Eine Matrix $A\in K^{n\times n}$ ist invertierbar, wenn $\mathrm{Rg}(A)=n$ ist.

Elementarmatrizen II 76

$A=(\alpha_{ij})\in K^{3\times 3}$

1) $P_{13}=(e_3,e_2,e_1)$

$$P_{13}A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\end{pmatrix} \quad \text{(Tausch 1. mit 3. Zeile)}$$

$$AP_{13}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{13}&\alpha_{12}&\alpha_{11}\\\alpha_{23}&\alpha_{22}&\alpha_{21}\\\alpha_{33}&\alpha_{32}&\alpha_{31}\end{pmatrix} \quad \text{(Tausch 1. mit 3. Spalte)}$$

2) $M_2=\mathrm{Diag}(1,\beta,1),\beta\neq 0$ (Multiplikation der 2. Zeile mit β)

$$M_2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\beta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\beta\alpha_{21}&\beta\alpha_{22}&\beta\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$$

3) $N_{13}=(e_1^T+\beta e_3^T,e_2^T,e_3^T)$ (Addition des β-fachen der 3. zur 1. Zeile)

$$N_{13}A=\begin{pmatrix}1&0&\beta\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}+\beta\alpha_{31}&\alpha_{12}+\beta\alpha_{32}&\alpha_{13}+\beta\alpha_{33}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$$

Determinanten **II 78**

Eine Determinante ist eine Zahl, die einer **quadratischen Matrix** A zugeordnet ist: $A\to\det(A)\in K$

Die Zahl $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ heißt **Kofaktor** zum Matrix-Element a_{ij}.

Kofaktor am Beispiel des Elements a_{23} der Matrix $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

durch Streichung der 2. Zeile und der 3. Spalte ergibt sich: $A_{23}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = (-1)^5\det(A_{23}) = -\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) = a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$$

Eigenschaften — II 82

Matrix $A=(a_1,\ldots,a_n)\in K^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren a_i $(i=1,\ldots,n)$ fester Vektor $\widehat{a}_j$

a) Wenn $\det(A)\neq 0\Rightarrow \operatorname{Rg}(A)=n\Leftrightarrow A$ invertierbar / Wenn $\det(A)=0\Rightarrow \operatorname{Rg}(A)<n$

b) $\det(a_1,\ldots,a_j+\widehat{a}_j,\ldots,a_n)=\det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n)+\det(a_1,\ldots,\widehat{a}_j,\ldots,a_n)$

c) $\det(a_1,\ldots,\lambda a_j,\ldots,a_n)=\lambda\det(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n)$

d) Besitzt A zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A)=0$ e) $\det(E)=1$

f) $\det(A^T)=\det(A)$ g) $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$

h) $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$ wenn A invertierbar i) $\det(B^{-1}AB)=\det(A)$ wenn B invertierbar

Berechnung — II 79

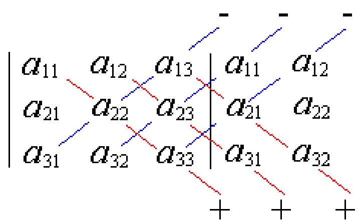
dreireihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

zweireihige Determinante: $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$



Sarrus´sche Regel

Hilfsmittel zur Berechnung — II 84

a) Entsteht B aus A durch Vertauschen von zwei Spalten, so gilt:
$\det(B)=-\det(A)$

b) Entsteht B aus A indem zur i-ten Spalte das λ-fache der j-ten Spalte $(i\neq j)$ addiert wird, so gilt:
$\det(B)=\det(A)$

c) Für eine obere Dreicksmatrix $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & *\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ gilt: $\det(A)=\underbrace{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n}_{\text{(Produkt der Diagonalelemente)}}$

d) Ist A eine $n\times n$-Matrix gemäß der Blockstruktur $\begin{pmatrix}A_1 & C\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$ mit quadr. Matrizen A_1, A_2, so gilt:

$\det(A)=\det(A_1)\det(A_2)$

Laplace'scher Entwicklungssatz (nur bei quadratischen Matrizen) — II 87

a) $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})}_{\text{Kofaktoren!}}$ fester Spaltenindex j

$=(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})+(-1)^{2+j}a_{2j}\det(A_{2j})+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nj}\det(A_{nj})$

b) $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})}_{\text{Kofaktoren!}}$ fester Zeilenindex i

$=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2})+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})$

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

Beispiel: $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6-3=3$

Cramersche Regel II 89

$Ax=b \quad , \quad A=(a_1,\ldots,a_n), A\in K^{n\times n} \quad , \quad b\in K^n \quad , \quad \det(A)\neq 0$

seien x_j die Komponenten des Vektors $x \qquad (j=1,\ldots,n)$

$$x_j=\frac{1}{\det(A)}\cdot\det(a_{1,}\ldots,a_{j-1},b,a_{j+1},\ldots,a_n)$$

Beispiel: $\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{b} \qquad \det(A)=2$

$$x_1=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&0&1\end{vmatrix}}_{=2}=1 \qquad x_2=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\1&3&1\end{vmatrix}}_{=0}=0 \qquad x_3=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&3\end{vmatrix}}_{=4}=2 \qquad \Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Inversenberechnung II 91

$A\in K^{n\times n}$ ist invertierbar, wenn $\det(A)\neq 0$. Dann gilt: $\underbrace{A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T}_{C=\text{Matrix der Kofaktoren}}$

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-2&4\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad \det(A)=6 \qquad C=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2&4\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&4\\1&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&-2\\1&0\end{vmatrix},\\ -\begin{vmatrix}2&-1\\0&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&-1\\-2&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1\\0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&1&2\\6&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\4&1&-4\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen **II 94**

V,W seien K-Vektorräume. $\Phi: V\to W$ heißt linear, wenn für beliebige $\alpha\in K$ und $u,v\in V$ gilt:

1) $\Phi(u+v)=\Phi(u)+\Phi(v)$ 2) $\Phi(\alpha u)=\alpha\Phi(u)$

Darstellung linearer Abbildungen II 96

V,W seien K-Vektorräume der Dimension n bzw. m und $\Phi: V\to W$ sei eine lineare Abbildung.

$\{v_{1,}\ldots,v_n\},\{w_{1,}\ldots,w_m\}$ Basen in V bzw. W. Für $w=\Phi(v)$ seien v,w mittels der Basen dargestellt:

$v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n \qquad w=y_1w_1+\ldots y_mw_m$

Die Koordinaten y_i von w können mittels der nachfolgenden Formel berechnet werden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}}_{\text{Koord. d. Bildvektors}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{m1}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}}_{\text{Abbildungsmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{\text{Koord. d. Urbildes}}$$

Die j-te Spalte der Matrix $A=(\alpha_{ij})$ ergibt sich aus der Darstellung von $\Phi(v_j)$ als LK der Basisvektoren von W.

Koordinatentransformation II 96

Zwei Basen desselben Raumes K^n: $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, $B=\{b_1,\dots,b_n\}$

Zerlegung eines Vektors $x\in K^n$ bzgl. jeder Basis: $x=x_1' a_1+\dots+x_n' a_n$ $\quad x=x_1'' b_1+\dots+x_n'' b_n$

Sei $x'=(x_i')$ und $x''=(x_i'')$. Die Abbildung T mit $x'=T(x'')$ heißt Koordinatentransformation.

$$A x'=B x''=x \;\Rightarrow\; x'=A^{-1}B x'' \;\Rightarrow\; x'=T x'' \qquad (T=A^{-1}B)$$
$$\Rightarrow\; x''=B^{-1}A x' \;\Rightarrow\; x''=T^{-1}x' \qquad (T^{-1}=B^{-1}A)$$

Änderung der Abbildungsmatrix beim Basiswechsel II 99

Sei $\Phi: K^n\to K^n$ eine lineare Abbildung und besitzt die Abbildungsmatrizen

C in Bezug auf eine Basis $\{a_1,\dots,a_n\}$ des K^n

D in Bezug auf eine Basis $\{b_1,\dots,b_n\}$ des K^n

Dann gilt: $D=T^{-1}CT$ $\quad$ (T s. Koordinatentransformation)

Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV) **II 100**

Eine Zahl λ heißt EW der Matrix $A\in K^{n\times n}$, wenn es (mind.) einen Vektor $v\in K^n, v\neq 0$ gibt, mit $Av=\lambda v$. Jeder Vektor v, der diese Bedingungen erfüllt, heißt EV zum EW λ.

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{(charakteristisches Polynom)}$$

$\lambda\in K$ ist EW von $A\in K^{n\times n}$, wenn λ NST des charakteristischen Polynoms.

Alle Vektoren $v\in K^n, v\neq 0$ zu EW λ, die $(A-\lambda E)v=0$ erfüllen, sind EV von A zum EW λ.

EV $v_1,\dots,v_k$ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ der Matrix A sind linear unabhängig.

Diagonalisierbarkeit II 103

Matrix $A\in K^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, wenn A n linear unabhängige EV $v_1,\dots,v_n\in K^n$ besitzt.

Für die Transformationsmatrix $T=(v_1,\dots,v_n)$ gilt: $T^{-1}AT=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

wobei die Reihenfolge der λ_i mi der der v_i übereinstimmt

Test auf Diagonalisierbarkeit:

a) Alle NST λ_i des charakteristischen Polynoms p_A in K

b) Allgebraische Vielfachheit n_i= Geometrische Vielfachheit $\dim V(\lambda_i)$ für jeden EW λ_i

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4 \;\Rightarrow\; \lambda_1=-1 \;,\; \lambda_2=4$$

$$\Rightarrow\; V(\lambda_1)=\left\{t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\} \;,\; V(\lambda_2)=\left\{t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\} \;\Rightarrow\; 2 \text{ lin. unabh. EV} \;\Rightarrow\; A \text{ diagonalisierbar}$$

$$\Rightarrow\; \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

Schema zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren II 101

1) Bestimmen der NST des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}(\lambda_2-\lambda)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda_k-\lambda)^{n_k}$, wobei n_i die <u>algebraische Vielfachheit</u> des EW λ_i heißt.
2) Zu jedem EW λ_i die Lösungsmenge des homogenen LGS $(A-\lambda_i E)x=0$ bestimmen, d.h. den Nullraum der Matrix $A-\lambda_i E$, also $V(\lambda_i)=N(A-\lambda_i E)=\left\{x\in K^n \mid (A-\lambda_i E)x=0\right\}$
   $V(\lambda_i)$ heißt <u>Eigenraum</u> zum Eigenwert λ_i
   $\dim V(\lambda_i)=n-\mathrm{Rg}(A-\lambda_i E)$ heißt <u>geometrische Vielfachheit</u> des Eigenwertes λ_i

Beispiel:

1) $A=\begin{pmatrix}4&0&1&-1\\0&4&-2&2\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}$

$\Rightarrow \quad p_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(4-\lambda)^2(2-\lambda)^2$

$\Rightarrow$ EW: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$ $\Rightarrow$ allgebraische Vielfachheit der EW jeweils 2

2) für λ_1: $(A-4E)x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad x_4=0,\, x_3=0,\, x_1,\, x_2\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad V(\lambda_1)=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,\, x_2\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ Die geometrische Vielfachheit zu λ_1 ist 2

für λ_2: $(A-2E)x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2&0&1&-1\\0&2&-2&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad x_4=0,\, x_1=\frac{1}{2}x_3,\, x_2=x_3=t$

$$\Rightarrow \quad V(\lambda_2)=\left\{t\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ Die geometrische Vielfachheit zu λ_1 ist 1

Formel zur Berechnung des charakteristischen Polynoms einer 3×3 Matrix

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}-\lambda&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})\cdot\lambda^2-[\det(A_{11})+\det(A_{22})+\det(A_{33})]\cdot\lambda+\det(A)$$

Orthogonale Matrizen II 108

Eine Matrix $S=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, wenn die Spaltenvektoren $\{s_1,\ldots,s_n\}$ eine ONB in $\mathbb{R}^n$ bilden, d.h. $S^T S=E \quad\Leftrightarrow\quad S^{-1}=S^T$

Symmetrische Matrizen
II 105

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$ gilt: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A^T$

- p_A besitzt nur reelle NST (alle EW von A liegen in $\mathbb{R}$)
- EV zu versch. EW von A sind orthogonal
- zu jeder sym. Matrix A gibt es eine ONB $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, die aus EV von A besteht. Es gilt:
  $S^T A S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- Geometrische und algebraische Vielfachheit stimmen für jeden EW überein

Definite Matrizen
II 112

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt
- positiv definit, wenn für alle $x \neq 0$ gilt: $x^T A x > 0$
- negativ definit, wenn für alle $x \neq 0$ gilt: $x^T A x < 0$
- positiv semidefinit, wenn für alle $x \neq 0$ gilt: $x^T A x \geq 0$
- negativ semidefinit, wenn für alle $x \neq 0$ gilt: $x^T A x \leq 0$

Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle EW von A positiv sind.

Positivitätstest (nach Jacobi):

$$\alpha_{11} > 0 \;,\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,\quad \ldots \;,\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} > 0 \;,\quad \ldots \;,\quad \det(A) > 0$$

Negativitätstest: identisch, aber alternierende Vorzeichen beginnend mit Minus !

Hauptachsentransformation / Quadriken
II 109

sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch , $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$

$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad p(x) = x^T A x + a^T x + \beta$ (quadratische Form) $\quad x^T A x + a^T x + \beta = 0$ (Quadrik)

Beispiele für $n=2$ und $n=3$:

1) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \beta = 0$

2) $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \beta = 0$

$\Leftrightarrow\; \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + 2\alpha_{23} x_2 x_3 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \beta = 0$

$x^T D x + d^T x + \beta = 0$ (Quadrik in Normalform) $\quad D =$ Diagonalmatrix

Bei einer Quadrik in Normalform, kommen keine gemischten Terme (xy, xz, etc.) vor!

Beispiele für $n=2$ und $n=3$:

1) $(x, y)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d_{2y} + \beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1x}^2 + \lambda_{2y}^2 + d_{2y} + \beta = 0$

2) $(x, y, z)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d_{2y} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1x}^2 + \lambda_{3z}^2 + d_{2y} = 0$

Überführung einer Quadrik in Normalform II 110

Ausgangspunkt für den Fall $n=3$: $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+a_{1x}+a_{2y}+a_{3z}+\beta=0$

1) Gleichung in Matrizen und Vektoren formulieren

$$\underbrace{(x,y,z)}_{x^T}\underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & c \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\underbrace{(a_1,a_2,a_3)}_{a^T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\beta=0$$

2) Berechnen der EW $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ und der zugehörigen ONB mit EV s_1,s_2,s_3. Setze $\underbrace{S=(s_1,s_2,s_3)}_{\text{neues Koord.System}}$

3) Übergang zu neuen Koordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ bzw. $S^T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ (Symmetrie)

$$\Rightarrow (x',y',z')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+a^T S\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}+\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1x}'^2+\lambda_{2y}'^2+\lambda_{3z}'^2+a'_{1x}'+a'_{2y}'+a'_{3z}'+\beta=0$$

4) Quadrik (falls nötig) auf Normalform bringen (durch quadr. Ergänzung und Substitution).

Differentialrechnung II 115

Funktionen in mehreren Variablen II 115

$$f: G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\to f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x)=f_1(x)\mathbf{e_1}+\ldots+f_m(x)\mathbf{e_m}$$

$\mathbb{R}^n$ Urbildraum ; G Definitionsbereich ; $\mathbb{R}^m$ Bildraum ; $f(G)=\{f(x)|x\in G\}$ Bild von f unter G

In Abhängigkeit von der Dimension des Bildraumes $\mathbb{R}^m$:
- skalarwertige Funktion, wenn $m=1$ (Symbol f)
- vektorwertige Funktion, wenn $m>1$ (Symbol $\mathbf{f}$)

Spezielle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ II 117

$\|x-y\|=\sqrt{<x-y,x-y>}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ Abstand zweier Punkte x,y

$U_\epsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<\epsilon\}$ ϵ-Umgebung von a

1.) $a\in G$ heißt **innerer Punkt** von G, wenn $\exists U_\epsilon(a)$, das ganz in G enthalten ist.
2.) $b\in G$ heißt **Randpunkt** von G, wenn in jeder $U_\epsilon(b)$ stets ein Punkt von G und ein Punkt von $\mathbb{R}^n\setminus G$ liegt. Die Menge aller Randpunkte heißt **Rand** von G (Symbol ∂G)
3.) Besteht G nur aus inneren Punkten, so heißt sie **offen**.
4.) Enthält G alle Randpunkte ($\partial G\subset G$), so heißt sie **abgeschlossen**.
5.) G heißt **beschränkt**, wenn $\exists R>0$, so daß $\forall x\in G$: $\|x\|\le R$. Ist G beschränkt und abgeschlossen, heißt sie **kompakt**.

Grenzwerte, Stetigkeit
II 119

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Punktfolge in $\mathbb{R}^n$ und sei $a\in\mathbb{R}^n$. x_k strebt genau dann gegen a, wenn jede Komponente x_{ki} gegen $a_i (i=1,\ldots,n)$ strebt, d.h. $x_k \to a \quad \Leftrightarrow \quad x_{ki}\to a_i$ (für jedes $i\in\{1,\ldots,n\}$)

Sei $f: G\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $a\in G$. Dann heißt f in a stetig, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ist (d.h. der Grenzwert von $f(x)$ für $x\to a$ muss existieren und mit $f(a)$ übereinstimmen).. f heißt stetig auf G wenn f in jedem Punkt $a\in G$ stetig ist.

Die Funktion f sei auf der kompakten Menge $K\subset\mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

a) Die Funktion f nimmt auf K ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt $a, b\in K$, so daß für alle $x\in K$ gilt: $f(a)\le f(x)\le f(b)$

b) Das Bild $f(K)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$.

Partielle Ableitungen
II 122

Die partielle Ableitung von f nach x_i erhält man, indem man vrübergehend alle Variablen mit Ausnahme von x_i als Konstante betrachtet und die nunmehr nur noch von x_i abhängige Funktion in gewohnter Weise nach x_i ableitet.

Besitzt die skalarwertige Funtion f an der Stelle x partielle Ableitungen nach allen ihren Variablen $x_1,\ldots,x_n$ so nennen wir den Vektor (s. rechts) den Gradienten von f an der Stelle x. Ist $\operatorname{grad} f(x)$ für alle $x\in G$ definiert, so wird durch $x\to \operatorname{grad} f(x)$ eine vektorwertige Funktion von $G\subset\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ erklärt.

$$\operatorname{grad} f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $f: G\to\mathbb{R}$ und $k\in\mathbb{N}$. Wir sagen: f ist eine C^k-Funktion auf G, wenn alle partiellen Ableitungen von f auf G bis zur Ordnung $\le k$ vorhanden und stetig sind.

Sei G eine offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $f: G\to\mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann gilt auf G für $i, j\in\{1,\ldots,n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Totale Differenzierbarkeit
II 128

G sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und es sei $f: G\to\mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0\in G$ total differenzierbar, wenn es einen Vektor $a\in\mathbb{R}^n$ gibt, so daß für eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ mit $U_\epsilon(x_0)\subset G$ das Inkrement $f(x)-f(x_0)$ die Darstellung

$$f(x)-f(x_0)=a^T(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

gestattet (mit $x\in U_\epsilon(x_0)$).

Ist f in $x_0\in G$ (G offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) total differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen von f in x_0 vorhanden und es gilt:

$$f(x)-f(x_0)=(\operatorname{grad} f(x_0))^T(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

Ist f in $x_0\in G$ total differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Jede C^1-Funktion f auf G (G offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) ist auf G total differenzierbar.

Richtungsableitung II 133

Die Funktion $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G offen, sei in $x_0 \in G$ total differenzierbar. Dann existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0)$ für jeden Richtungsvektor $s \in \mathbb{R}^n (\|s\|=1)$ und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0))^T s$$

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0)$ gibt die Änderungsrate (Steigung) der skalarwertigen Funktion f im Punkt x_0 in Richtung s an.

Geometrische Interpretation des Gradienten II 134

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (G \text{ offen})$ sei in x_0 total differenzierbar und sei $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es unter allen Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial s}(x_0)$ eine größte, nämlich diejenige in Richtung des Gradienten $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Der Wert dieser Richtungsableitung ist $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.

Im Fall $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ ist der Wert der Richtungsableitung von f in x_0 bzgl. jeder Richtung s null.

Hessematrix II 142

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & f_{x_1 x_2}(x) & \dots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & f_{x_n x_2}(x) & \dots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Ist f eine C^m-Funktion auf $G (m \geq 2)$, so gilt:

$$f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x),$$

so daß dann $H_f(x)$ eine symmetrische Matrix ist.

Taylorsche Satz II 138

Ist x in t und f in $x(t)$ differenzierbar, so ist φ in t differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(t) = (\operatorname{grad} f(x(t)))^T \cdot x'(t)$$

Satz von Taylor für Funktionen von n Variablen

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (h_1 D_1 + \ldots + h_n D_n)^k f(x_0) + o(\|h\|^m)$$

Der o-Term ist durch $R_m(x_0, h) = \frac{1}{(m+1)!} (h_1 D_1 + \ldots + h_n D_n)^{k+1} f(x_0 + \vartheta h)$ mit $\vartheta \in [0,1]$ gegeben.

Spezialfall Entwicklung um $x=0$: $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (x_1 D_1 + \ldots + x_n D_n)^k f(0) + o(\|x\|^m)$

Entwicklung für Funktion von 2 Variablen um $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (x D_1 + y D_2)^k f(0,0) + o(\|(x, y)\|^m) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0,0) + o(\|(x, y)\|^m) \end{aligned}$$

Taylorformel 2. Ordnung

$$f(x_0+h) = f(x_0) + (\operatorname{grad} f(x_0)^T) h + \frac{1}{2} h^T \underbrace{H_f(x_0)}_{\text{Hesse-Matrix}} h + o(\|h\|^2)$$

oder äquivalent mit $x = x_0 + h$:

$$f(x) = f(x_0) + (\operatorname{grad} f(x_0)^T)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T \underbrace{H_f(x_0)}_{\text{Hesse-Matrix}} (x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

Lokale Extrema im Inneren von G / kritische Punkte — II 143

f besitze in dem inneren Punkt $a \in G$ ein lokales Extremum und sei in a nach allen Variablen partiell differenzierbar. Dann gilt: $\operatorname{grad} f(a) = 0$

Extremstellentest für n Variable

f sei eine C^2-Funktion auf G, a sei ein innerer Punkt von G. Dann gelten für einen kritischen Punkt a von f folgende Aussagen:

1) Ist $H_f(a)$ positiv definit, so ist a lokale Minimumstelle.
2) Ist $H_f(a)$ negativ definit, so ist a lokale Maximumstelle.
3) Ist $H_f(a)$ indefinit, so ist a ein Sattelpunkt.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta = \det(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A \text{ pos. definit, wenn } \alpha_{11} > 0, \Delta > 0 \\ A \text{ neg. definit, wenn } \alpha_{11} < 0, \Delta > 0 \end{matrix}$$

Extremstellentest für 2 Variable

$f: G \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei eine C^2-Funktion auf G, a sei ein innerer Punkt von G. Für einen kritischen Punkt a von f gelten folgende Aussagen:

1) Ist $\Delta = \det H_f(a) > 0 \wedge f_{xx}(a) > 0$, so ist a lokale Minimumstelle.
2) Ist $\Delta = \det H_f(a) > 0 \wedge f_{xx}(a) < 0$, so ist a lokale Maximumstelle.
3) Ist $\Delta = \det H_f(a) < 0$, so ist a ein Sattelpunkt.

Lokale Extrema mit Nebenbedingungen — II 147

notw. Bedingung für Extremstellen mit einer Nebenbedingung

f, g seien C^1-Funktionen auf G. Zu jeder Extremstelle a gibt es, falls $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$ ist, genau eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß gilt: $\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a)$

Differentiation vektorwertiger Funktionen — II 151

Sei G offen und $x_0 \in G$. Dann heißt f in x_0 total diff.bar, wenn jede Komponentenfunktion f_i in $x_0 (i = 1, \ldots, m)$ total diff.bar ist.

Kettenregel, allg. Fall:
$J_{f \circ g}(x_0) = J_f(g(x_0)) J_g(x_0)$

$$f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0)^T h + o_i(\|h\|)$$

$$= f(x_0) + \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0)^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0)^T \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} o_1(\|h\|) \\ \vdots \\ o_m(\|h\|) \end{pmatrix} = f(x_0) + \underbrace{J_f(x_0)}_{\text{Jacobi-Matrix}} h + o(\|h\|)$$

Jacobi-Matrix — II 151

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0)^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & D_2 f_1(x_0) & \ldots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & D_2 f_m(x_0) & \ldots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Divergenz, Rotation — II 156

$$\operatorname{rot} f(x) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x)\right) e_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x)\right) e_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right) e_3$$

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)$$

1) $\operatorname{div}(f+g) = \operatorname{div} f + \operatorname{div} g$, $\operatorname{div}(\alpha f) = \alpha \operatorname{div} f$, $\operatorname{div}(\varphi f) = (\operatorname{grad} \varphi) \cdot f + \varphi \operatorname{div} f$
2) $\operatorname{rot}(f+g) = \operatorname{rot} f + \operatorname{rot} g$, $\operatorname{rot}(\alpha f) = \alpha \operatorname{rot} f$, $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\operatorname{grad} \varphi) \times f + \varphi \operatorname{div} f$
3) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div}(\varphi_x e_1 + \varphi_y e_2 + \varphi_z e_3) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$
4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta f$