

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Vektoraddition</b><br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>Skalares Vielfaches</b><br>$\alpha \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \vec{e}_1 \\ \alpha a_2 \vec{e}_2 \\ \alpha a_3 \vec{e}_3 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>Betrag von <math>\vec{a}</math></b><br>$ \vec{a}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ |
| <b>Skalarprodukt</b><br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$<br>$\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \phi(\vec{a}, \vec{b}) \quad (=0 \text{ wenn } \vec{a} \perp \vec{b})$<br>$\cos \phi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$<br>$\cos \phi(\vec{a}, \vec{e}_i) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ | <b>Kreuzprodukt</b><br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$<br>$ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \phi(\vec{a}, \vec{b})$<br>(Grassmann)<br>$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$<br>(Lagrange)<br>$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$ |                                                                                      |

**Spatprodukt** (z.B. Volumen / Test auf Rechts- bzw. Linkssystem von drei Vektoren)

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{\text{Flächeninhalt}} \underbrace{|\vec{c}| \cos \phi(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})}_{\text{Projektion von } \vec{c} \text{ auf } \vec{a} \times \vec{b}}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (\text{zyklische Vertauschung})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} \quad (\text{Vorzeichenwechsel!})$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0 \Rightarrow \text{Rechtssystem}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0 \Rightarrow \text{Linkssystem}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Rightarrow \text{weder noch}$$

### Rechengesetze

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(3) \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$(4) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$(5) \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$(6) (\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a})$$

$$(7) (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

$$(8) \alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$(9) 1 \vec{a} = \vec{a}$$

$$(10) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(11) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(12) (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(13) \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$$

$$(14) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(15) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$(16) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$(17) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(18) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

**Zerlegung eines Vektors  $\vec{d}$  in die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  mit  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$**

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} \quad \lambda_1 = \frac{[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad \lambda_2 = \frac{[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad \lambda_3 = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$$

**orthogonale Zerlegung** von  $\vec{a}$  längs einer Richtung  $\vec{s}$  mit  $\vec{a}_s \parallel \vec{s}$  und  $\vec{a}_m \perp \vec{s}$

$$\vec{a}_s = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|^2} \right) \cdot \vec{s} \quad \vec{a}_m = \vec{a} - \vec{a}_s$$

## Geradengleichungen

Punkt-Richtungsform

$$\vec{x} = \vec{p} + t \vec{a} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Zwei-Punkte-Form

$$\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

## Ebenengleichungen

Parameterdarstellung / Punkt-2-Richtungsform

Achtung:  $\vec{a}, \vec{b}$  nicht linear abhängig, d.h. nicht parallel !

$$\vec{x} = \vec{p} + t \vec{a} + s \vec{b} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Normalform / Hessesche Normalform

$$\begin{aligned} \vec{n}(\vec{x} - \vec{p}) &= 0 \Leftrightarrow \vec{n}\vec{x} = \vec{n}\vec{p} \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 &= n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 \\ n_1 x + n_2 y + n_3 z &= d \\ (\text{für } |\vec{n}| = 1 \Rightarrow d &= \text{Abstand zum Ursprung}) \end{aligned}$$

Drei-Punkte-Form

$$\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) + s(\vec{r} - \vec{p}) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} r_1 - p_1 \\ r_2 - p_2 \\ r_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

## Reellwertige Funktionen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{Achtung: } g(x) \neq 0)$$

## Beträge

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = |a| \quad |ab| = |a||b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (\text{falls } b \neq 0)$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \quad (\text{mit } b > 0) \quad |a+b| \leq |a| + |b|$$

## Bezeichnung von Funktionen

Periodisch:  $f(x) = f(x+T)$

z.B.  $f(x) = \sin(x)$ ,  $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ ,  $T = 2\pi$

Gerade:  $f(x) = f(-x)$

z.B.  $f(x) = x^2 + 1$  (achsensymmetrisch zur y-Achse)

Ungerade:  $f(-x) = -f(x)$

z.B.  $f(x) = x^3 + 2x$  (punktsymmetrisch zum Ursprung)

## Quadratische Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (\text{p-q-Formel})$$

## Intervalle

offenes  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$

geschlossenes  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

nach links offenes  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

nach rechts offenes  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Randpunkte:  $a, b$  Länge:  $b - a$

Mittelpunkt:  $\frac{a+b}{2}$  Radius:  $\frac{b-a}{2}$

## Schranken

$M \subset \mathbb{R}$  heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl  $b \in \mathbb{R}$  gibt, so daß gilt:  $x \leq b \quad \forall x \in M$   
 $b$  heißt dann obere Schranke

$M \subset \mathbb{R}$  heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so daß gilt:  $x \geq a \quad \forall x \in M$   
 $a$  heißt dann untere Schranke

kleinste obere Schranke:  $\sup M$  (Supremum)  
 größte untere Schranke:  $\inf M$  (Infimum)

## Summen

$$\sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

$$\sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k$$

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1} \quad (\text{Indexverschiebung})$$

$$\sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k = \sum_{k=m}^n a_k \quad (\text{wenn } m \leq p < n)$$

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1} \quad (\text{Teleskopprinzip})$$

## Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

mit  $\binom{n}{0} = 1$  (gelesen "n über k")

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (\text{Summationsformel / Pascalsches Dreieck})$$

### Das Pascalsche Dreieck:

|           |               |
|-----------|---------------|
| $(a+b)^0$ | 1             |
| $(a+b)^1$ | 1 1           |
| $(a+b)^2$ | 1 2 1         |
| $(a+b)^3$ | 1 3 3 1       |
| $(a+b)^4$ | 1 4 6 4 1     |
| $(a+b)^5$ | 1 5 10 10 5 1 |

## Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad (\text{Pascalsches Dreieck})$$

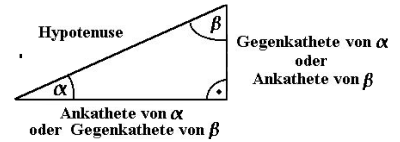
## Besondere Gleichungen in kartesischen Koordinaten

|                            |                                                                                                                            |                                                                                                                                                                           |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kreis<br>$x^2 + y^2 = r^2$ | Hyperbel<br>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>$a$ = Abstand vom Ursprung auf der x-Achse                          | Ersetzt man in den Gleichungen<br>$x$ und $y$<br>durch<br>$(x-x_0)$ und $(y-y_0)$ ,<br>so liegt der Mittelpunkt bzw.<br>Scheitelpunkt in den Koordinaten<br>$(x_0 y_0)$ . |
| Parabel<br>$y^2 = 2px$     | Ellipse<br>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>$a$ = Ausdehnung auf der x-Achse<br>$b$ = Ausdehnung auf der y-Achse |                                                                                                                                                                           |

## Kreis- und Winkelfunktionen

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$



$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \quad (\text{Wertebereich} = [-1, 1]) \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

| <div>Periodizität</div> <div><math>\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha) \quad (2\pi\text{-P.})</math><math display="block">\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha) \quad (2\pi\text{-P.})</math><math display="block">\tan(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)}=\tan(\alpha) \quad (\pi\text{-P.})</math></div>                                                                                                                                                                                   | <div>Additionstheoreme</div> <div><math display="block">\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)</math><math display="block">\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)</math><math display="block">1=\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) \quad (\text{Pythagorasidentität})</math><math display="block">\sin(\alpha+\beta)=-\sin(\alpha) \quad , \quad \cos(\alpha+\beta)=-\cos(\alpha)</math></div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                      |                      |                      |                 |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|---|----------------------|----------------------|---------------|---|----------------|---|---------------|----------------------|----------------------|---|----------------|---|----------------------|---|------------|----------|
| <div>Symmetrie</div> <div><math display="block">\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha) \quad (\text{Ungerade})</math><math display="block">\cos(\alpha)=\cos(-\alpha) \quad (\text{Gerade})</math><math display="block">\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha) \quad (\text{Ungerade})</math></div>                                                                                                                                                                                                                                                           | <div>spezielle Funktionswerte</div> <table><tr><th><math>\alpha</math></th><th>0</th><th><math>\frac{\pi}{6}</math></th><th><math>\frac{\pi}{4}</math></th><th><math>\frac{\pi}{3}</math></th><th><math>\frac{\pi}{2}</math></th></tr><tr><td><math>\cos(\alpha)</math></td><td>1</td><td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td><td><math>\frac{1}{\sqrt{2}}</math></td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td>0</td></tr><tr><td><math>\sin(\alpha)</math></td><td>0</td><td><math>\frac{1}{2}</math></td><td><math>\frac{1}{\sqrt{2}}</math></td><td><math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></td><td>1</td></tr><tr><td><math>\tan(\alpha)</math></td><td>0</td><td><math>\frac{\sqrt{3}}{3}</math></td><td>1</td><td><math>\sqrt{3}</math></td><td><math>\infty</math></td></tr></table> | $\alpha$             | 0                    | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cos(\alpha)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\sin(\alpha)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\tan(\alpha)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |
| $\alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |
| $\cos(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |
| $\sin(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |
| $\tan(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$        |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |
| <div>Nullstellen</div> <div><math display="block">\sin(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, \pm \pi, \pm 2 \pi, \dots\} = (k \pi \mid k \in \mathbb{Z})</math><math display="block">\cos(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2} \pi, \pm \frac{5}{2} \pi, \dots \right\} = \left( \frac{\pi}{2} + k \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right)</math><math display="block">\tan(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, \pm \pi, \pm 2 \pi, \dots\} = (k \pi \mid k \in \mathbb{Z})</math></div> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                      |                      |                      |                 |                 |                 |                |   |                      |                      |               |   |                |   |               |                      |                      |   |                |   |                      |   |            |          |

## Polarkoordinaten

$$P = (r, \alpha) \quad \text{mit } r = \text{Radius und } \alpha = \text{Winkel im Bogenmaß} \quad \alpha = 2\pi \frac{\alpha^0}{360} \quad \text{mit } \alpha^0 = \text{Winkel in Grad}$$

|               |       |                             |                      |                              |            |                        |                              |                       |
|---------------|-------|-----------------------------|----------------------|------------------------------|------------|------------------------|------------------------------|-----------------------|
| $(x, y)$      | (1,0) | (1,1)                       | (0,1)                | (-1,1)                       | (-1,0)     | (-1,-1)                | (1,-1)                       | (0,-1)                |
| $(r, \alpha)$ | (1,0) | $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ | $(1, \frac{\pi}{2})$ | $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ | $(1, \pi)$ | $(1, -\frac{3\pi}{4})$ | $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ | $(1, -\frac{\pi}{2})$ |

$$x = r \cos(\alpha) \quad y = r \sin(\alpha)$$

## Umwandlung Kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten

$$P = (x, y) \neq (0,0) \Rightarrow P(r, \alpha)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \alpha = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0 \quad ; \quad (1./4. \text{ Quadrant}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{falls } x < 0, y \geq 0 \quad ; \quad (2. \text{ Quadrant}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{falls } x < 0, y < 0 \quad ; \quad (3. \text{ Quadrant}) \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y < 0 \end{cases} \quad \text{oder } \alpha = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$



## Reihen

### Konvergenz

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| $\sum a_k$ ist divergent, wenn die Folge $a_k$ nicht $\rightarrow 0$                                                                                                                                                                                                                                       | Notw. (n. hinr. !) Bed. f. Konvergenz |
| $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \quad (\text{mit } \alpha_k > 0) \quad \underbrace{\text{alternierende Reihe}}_{(\text{Vorzeichenwechsel})}$ <p>Jede alternierende Reihe ist konvergent, wenn sie für jedes Glied streng monoton fallend ist.</p> | Leibniz'sche Regel                    |
| $\sum c_k$ (konvergent, nicht negativ): $ a_k  \leq c_k \Rightarrow \sum a_k$ ist (abs.) konvergent<br>$\sum d_k$ (divergent, nicht negativ): $a_k \geq d_k \Rightarrow \sum a_k$ ist divergent                                                                                                            | Vergleichskriterium                   |
| Für $\sum a_k$ existiert $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{ a_k }$<br>1) $R < 1 \Rightarrow$ Reihe (abs.) konvergent      2) $R > 1 \Rightarrow$ Reihe divergent<br>3) $R = 1 \Rightarrow$ Entscheidung nicht möglich                                                                              | Wurzeltest                            |
| Für $\sum a_k$ mit $a_k \neq 0$ existiert $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ a_{k+1} }{ a_k }$<br>1) $L < 1 \Rightarrow$ Reihe (abs.) konvergent      2) $L > 1 \Rightarrow$ Reihe divergent<br>3) $L = 1 \Rightarrow$ Entscheidung nicht möglich                                                     | Quotiententest                        |

### Rechengesetze für konvergente Reihen

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Cauchy-Produkt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  (absolut konvergent):

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) * \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots$$

### Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Ist nach Quotiententest  $L$  ungleich 0 oder  $\infty$ , so existiert  $r > 0$ , so daß:

- a)  $\forall x \in (-r, r) \Rightarrow$  Reihe (abs.) konvergent      b)  $\forall x$  mit  $|x| > r \Rightarrow$  Reihe ist divergent  
 c) in den Randpunkten kann die Reihe kon- oder divergent sein

### Konvergenzradius

Für  $\sum \alpha_k x^k$  gilt:

a)  $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\alpha_k|}}$   
 b)  $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right| \quad (\alpha_k \neq 0 \forall k)$

### Zusammenstellung einiger Reihen

- $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$  (falls  $|q| < 1$ ) (geometrische Reihe)
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$  (Fakultätenreihe)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$  (harm. Reihe)
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$  (alt., harm. Reihe)
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \quad \begin{cases} \text{ist konvergent, falls } p > 1 \\ \text{ist divergent, falls } p \leq 1 \end{cases}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  (Def. Exp.-funktion)

## Funktionen

Verhalten rationaler Funktionen für  $|x| \rightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} \quad \text{Zählergrad} = n, \text{ Nennergrad} = m$$

$$1) \ n < m \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty$$

$$2) \ n = m \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_n}$$

$$3) \ n > m \Rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{h(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}_{\text{Polynomdivision}} \Rightarrow f(x) \approx h(x) \text{ für } |x| \rightarrow \infty$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exp(x) := e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$1) \ e^{x+y} = e^x e^y \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

$$2) \ e^x > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$3) \ e^{x_1} > e^{x_2} \quad (\text{falls } x_1 > x_2)$$

$$4) \ e^x \rightarrow \infty \quad (\text{für } x \rightarrow +\infty) \quad e^x \rightarrow 0 \quad (\text{für } x \rightarrow -\infty)$$

$$5) \ \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$$

### Logarithmus

$$1) \ y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y) \quad 2) \ \log_a(x^c) = c \log_a(x)$$

$$3) \ \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$4) \ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$5) \ \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$6) \ \ln(1) = 0$$

$$7) \ e^{\ln(x)} = x \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$$8) \ \ln(e) = 1$$

### Potenzen

$$1) \ a^{x+y} = a^x a^y$$

$$2) \ a^x b^x = (ab)^x$$

$$3) \ (a^x)^y = a^{xy}$$

$$4) \ \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

### Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

### Additionstheoreme

$$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

## Differentiation

Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Steigung durch die Punkte  $\underbrace{(x, f(x))}_{\text{fester Punkt}}$

und  $\underbrace{(x+h, f(x+h))}_{\text{variabler Punkt, } h \rightarrow 0}$

Näherung 1. Ordnung

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R(h)$$

Ableitungsregeln

$$1) (f+g)' = f' + g'$$

$$2) (\alpha f)' = \alpha f'$$

$$3) (fg)' = f'g + fg'$$

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$5) (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## Grundableitungen

| $f$                        | $f'$                      | $D_{f'}$                      | $f$                        | $f'$                     | $D_{f'}$     |
|----------------------------|---------------------------|-------------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------|
| $x^\alpha$                 | $\alpha x^{\alpha-1}$     | abh. v. $\alpha$              | $e^x$                      | $e^x$                    | $\mathbb{R}$ |
| $\sqrt{x}$                 | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$     | $x > 0$                       | $e^{kx}$                   | $k e^{kx}$               | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(x)$                  | $\cos(x)$                 | $\mathbb{R}$                  | $a^x$                      | $(\ln a) a^x$            | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$                  | $-\sin(x)$                | $\mathbb{R}$                  | $\ln x $                   | $\frac{1}{x}$            | $x \neq 0$   |
| $\tan(x)$                  | $\frac{1}{\cos^2(x)}$     | $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $\log_a(x)$                | $\frac{1}{(\ln a)x}$     | $x > 0$      |
| $\tan(x)$                  | $1 + \tan^2(x)$           | $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $\sinh(x)$                 | $\cosh(x)$               | $\mathbb{R}$ |
| $\arcsin(x)$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  | $ x  < 1$                     | $\cosh(x)$                 | $\sinh(x)$               | $\mathbb{R}$ |
| $\arccos(x)$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $ x  < 1$                     | $\tanh(x)$                 | $\frac{1}{\cosh^2(x)}$   | $\mathbb{R}$ |
| $\arctan(x)$               | $\frac{1}{1+x^2}$         | $\mathbb{R}$                  | $\operatorname{arsinh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{artanh}(x)$ | $\frac{1}{1-x^2}$         | $ x  < 1$                     | $\operatorname{arcosh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x > 1$      |

## Mittelwertsatz (Differentialrechnung)

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (\text{verallgemeinerter MWS})$$

l'Hospital  $\left(\frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$f$  und  $g$  differenzierbar,  $g'(x) \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Integration

### Grundintegrale

| $\int f(x) dx = F(x) + c$                                                        | <b>Bem.</b>      | $\int f(x) dx = F(x) + c$                                                        | <b>Bem.</b>                   |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $\int a dx = ax + c$                                                             |                  | $\int e^x dx = e^x + c$                                                          |                               |
| $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$                         | $\alpha \neq -1$ | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$                                            | $a > 0$                       |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$                                       | $x > 0$          | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$                                        | $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ |
| $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$                                  | $x > 0$          | $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$                                      |                               |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$                                                | $x > 0$          | $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$                                        |                               |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$                                                   |                  | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$                                 | $ x  < 1$                     |
| $\int \cos x dx = \sin x + c$                                                    |                  | $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + c$                   |                               |
| $\int \sinh x dx = \cosh x + c$                                                  |                  | $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x + c$                          | $ x  < 1$                     |
| $\int \cosh x dx = \sinh x + c$                                                  |                  | $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$                                       | $x \neq 0$                    |
| $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax} + c$ |                  | $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax} + c$ |                               |

### Regeln

- 1)  $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$  (Linearität)
- 2)  $\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx$  (Produktregel / part. Integration)
- 3)  $\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c$  (Substitution I)
- 3.1)  $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$  (Spezialfall 1)
- 3.2)  $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$  (Spezialfall 2)
- 4)  $\int f(x) dx$ 
  - a) Substitution  $x = g(t), dx = g'(t) dt$  (Substitution II)
  - b) Berechnung  $\int f(g(t)) g'(t) dt = H(t) + c$
  - c) Resubstitution  $H(g^{-1}(x)) + c$
- 5)  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  Grad  $p <$  Grad  $q$  (Partialbruchzerlegung)
  - a) NST m. Vielfachheit 1 berechnen
  - b) Glg. i. flg. Form bringen: z.B.  $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{A}{x+1} + \frac{A}{x-2}$
  - c) Glg. auf 1 Nenner bringen u. n. Zähler-Grad v. x sortieren
  - d) LGS durch Koeff.-vgl. aufl.
  - e) Integral aufspalten in kleinere Grundintegrale

### Bestimmte Integrale

- 1)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$
- 2)  $\int_a^a f(x) dx = 0$
- 3)  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$  für  $a < b$
- 4)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

### Uneigentliche Integrale

Unbeschränkte Integrationsintervalle

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} (F(A) - F(a)) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^{x \rightarrow \infty}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

### Konvergenz

$f, g, h$  seien auf  $[a, \infty)$  stetig

a)  $0 \leq |f| \leq g$  auf  $[a, \infty)$  und  $\int_a^\infty g(x) dx$  konvergent

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ absolut konvergent}$$

b)  $0 \leq h \leq f$  auf  $[a, \infty)$  und  $\int_a^\infty h(x) dx$  divergent

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ divergent}$$

### Regeln

- 1)  $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$  (Linearität)
- 2)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  ( $a < c < b$ ) (Zerlegung)
- 3)  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  (Monotonie)
- 4)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
- 5)  $\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$  (Produktregel)
- 6)  $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$  (Substitution)

### Taylor'sche Satz

Taylorformel  $a = \text{Entwicklungspunkt des Taylorpolynoms}$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x, a)$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}_{\text{Taylorpolynom von } f \text{ an der Entwicklungsstelle } a} + R_n(x, a)$$

Taylorpolynom von  $f$  an der Entwicklungsstelle  $a$

### Restglieder

$$R_n(x, a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{nach Cauchy / theoretisch})$$

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{mit } \xi \text{ zwischen } a \text{ und } x, \text{ nach Lagrange / praktisch})$$

### Taylorpolynome vom Grad 1 bis 3

$$T_1(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$T_2(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

$$T_3(x, a) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3$$

### Annäherung des Taylorpolynoms an die Funktion f über das Intervall I

$$|f(x) - T_n(x, a)| = |R_n(x, a)|$$

Abschätzen des Restgliedes (Lagrange Form) durch Einsetzen der größtmöglichen Werte, die  $|f^{n+1}(\xi)|$  und  $|x - a|$  auf I annehmen können.

### Besondere Taylorreihen

$$1) e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$2) \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$3) \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$4) \sinh x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$5) \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$6) \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1) \quad (\text{geom. Reihe})$$

$$7) \ln(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$8) \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1)$$

### Potenzreihen mit Zentrum a

#### Definition

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots$$

#### Integration einer Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots \quad \forall c, d \in [a-r, a+r]$$

$$\Rightarrow \int_c^d f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_c^d (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} \left[ (x-a)^{k+1} \right]_{x=c}^{x=d}$$

#### Differentiation einer Potenzreihe

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k (x-a)^{k-1} = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 + \dots$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \alpha_k (x-a)^{k-2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-a) + 12\alpha_4(x-a)^2 + \dots$$